SC. I. P. 2

Digitized by Google

32 6 C 8

ELEMENTA
RITHMETICÆ
UMERICÆ ET LITERALIS,

EXPOSITA

A JOANNE CRIVELLIO,
C. R. S.
Academiæ Bononienſis ACADEMICO Honorario, & Regiæ Societatis Londinenſis SOCIO.

EDITIO TERTIA, PRIORIBUS CORRECTIOR.

VIENNÆ AUSTRIÆ,
EX TYPOGRAPHIA KALIWODIANA.

M. DCC. XLV.

32 · 6 · C · 8

2

Digitized by Google

PRÆFATIO.

DUas partes continet Arithmetica, primam, quæ circa ſimpliciores computationes verſatur, ad uſum civilem ſpectantes, alteram, quæ ſublimiores computationes tractat, ſpectantes ad Scientias. Prima pars dicta fuit MINOR, ſecunda MAJOR. Prima communiter ARITHMETICA fuit appellata. Secunda ANALYSIS, quaſi *Scientia Reſolutoria*, quoniam ab ipſa reſolvuntur graviora problemata. Hanc Arabes appellarunt *Al'gia'br*, quaſi *Artem* reducendi, unde originem traxit nomen Algebræ, & Almukabalæ; quaſi *Artis Comparatricis*; nam *comparando* inter ſe quantitates, & ipſas adæquando ad veritatem ducit, & quod erat confuſum, obſcurumque, invenit, & demonſtrat. (*a*) Theon inventionem hujuſce artis Platoni attribuit. Defendunt tamen Pythagorici

(a) *L. 13. Euclidis, ſi tamen Theon eſt, & non alius Auctor.*

hanc a Pythagora didiciſſe Platonem ; ſed hanc antiquiſſimam fuiſſe , & populis orientalibus familiarem affirmat Stevinus (*a*) Sæculo erudito. Illud certum eſt , ipſa Veteribus habitam fuiſſe tanquam arcanam & myſteriorum plenam , quam nefas eſſet vulgo communicare : ex quo factum eſt potiſſimum , (niſi & ipſius ſcientiæ difficultatem accuſare velis) ut vix veſtigia cernantur in Veterum libris. Fortaſſe etiam (quod queritur (*b*) Nonnius) ut admirationem magis excitarent , maluerunt exponere veritates inventas, quam methodum illas inveniendi.

Liber antiquior, qui apud nos extat, eſt Diophantis Alexandrini, qui translatus ex lingua græca in latinam, prodiit in lucem Anno 1575., & ampliori commento inde illuſtratus fuit a Bacheto Sebuſiano , & mox a Fermatio. Sed jam pridem Analyſin in Europam invexerant Arabes , cum Hiſpaniis potirentur,& cum computationes fierent vel per Literas Græcas , vel per Numeros Romanos , introductæ ſunt cyphræ , ut appellant , *Barbaræ* , quibus communiter utimur, ſecundum proportionem decadicam : his ars

(a) *In Geographicis.*
(b) *In Algebra.*

ars facilior & perfectior evaſit. Cum primum hoc inceperit, haud facile eſt definire. (a) Gerardus Voſſius putat factum eſſe Anno 1250. (b) Valliſius tamen pluribus argumentis conjicit, id eſſe antiquius. Illud autem conſtat Arabes accepiſſe hujuſmodi cyphras ab Indis, ut legere eſt in Commentariis Al'Sephadi Arabis ad Poema Tograi, ubi tres inventiones tribuuntur Indis: quorum prima eſt liber, cui titulus Golaila Wadamna, quo Apologi quidam continentur; altera Schacchiorum Ludus; tertia Cyphrarum. Quare veriſimile eſt, Arabes hanc methodum computandi ab Indis accepiſſe. Illud certum eſt, quod, cum prodiit Analyſis Græca, omnino diverſa apparuit ab Analyſi Arabica.

Plurimi circa Arithmeticam Minorem verſati ſunt; pauci circa Majorem. Primus, qui Theoriam hujuſce partis edidit in lucem, cenſetur eſſe Lucas a S. Sepulchro, Ordinis Minorum An. 1494. Venetiis, in quo tamen tractatu ipſe pleroſque in hac arte inſignes memorat, ut Paulum a Pergola, Dominicum Bargadenum, & Antonium Cornelium, Patritios Venetos, & multa ipſe ſe affirmat accepiſſe ex Scriptis Leonardi Piſani, Jordani,

(a) *In Scientiis Mathematicis C. 8.*
(b) *In Algebra C. 4.*

ad Anglos Specioſam, Harriotus, & Oughtredus vires intendere, ut perficerent, primusque prodiit Oughtredus, ſub titulo: *Clavis Mathematicæ* Anno 1631. & poſt paucos dies viſa eſt etiam *Praxis Analytica* Harrioti, edita poſt mortem Auctoris a Valterio Valnerio. Quemadmodum Oughtredus parum diſceſſit a Vieta, ita Harriotus plurima addidit utiliſſima, & quoad uſum Symbolorum, & quoad naturam Æquationum. Anno 1637. magno plauſu recepta eſt Algebra Carteſii, cujus uſus in Geometricis maximam admirationem excitavit, ut omnes illius ſæculi Mathematici curam impenderent ad illam promovendam, & excolendam. Hos inter Franciſcus Schootenius, Eraſmus Bartolinus, Hudenius, Vithus, Bonius, Sluſius & alii plurimi, qui hujusmodi Analyſin excoluere, Carteſianam dictam. Poſt quos incredibile, ad quos gradus fuerit promota, contendentibus quadam æmulatione omnium nationum Philoſophis. Tum primum applicata fuit a Valliſio ad methodum *indiviſibilium*, a Cavallerio expoſitam, Anno 1655., inde a Newtono ad ſeries infinitas, & ad ſublimiores Curvas, ipſasque Quantitates infiniteſimas, cujus methodus a Leibnitio expoſita Anno 1684. excita-

citavit ingenia hominum doctiſſimorum, ut utriusque Bernoullii, & Marchionis ab Hoſpitalio, aliorumque plurimorum, quorum opera provecta eſt ad gradum, ultra quem videtur evehi non poſſe.

Hujus Scientiæ elementa tradere in animo eſt, ut iis intellectis ad ſublimiora poſſit aſcendi. Permultos ſcientiarum adipiſcendarum cupidos diſcendi labor retinet. Arithmetica, & Geometria ſunt primæ Scientiæ, quibus tanquam alis, ut notat Plato, fertur intellectus ad veritatem; illas tamen penetrare non eſt obvium. Auctores celebriores ad ſublimiora intendentes, elementaria neglexere. Plerique de Arithmetica minore tractarunt, pauci de majore; alii theorias, non tamen praxes; praxes alii ſine theoriis expoſuere: plurimi numeros ſine ſymbolis, nonnulli ſymbola ſine numeris. Nos operæ pretium facturos cenſuimus, ſi Scientiam hujusmodi a primis principiis pertractaremus, neque ſolum theoriis, ſed etiam praxibus expoſitis, numeris ſymbola jungeremus, gradatim aſcendendo a ſimplici ad compoſitum, & a parte *minori* ad *majorem*. Lectorem hic ſupponimus omnino rudem, a numeris, & quantitatibus, & zero incipientem. Opus autem in duas partes dividi-

vidimus. In prima exponitur natura numeri, & Algorithmus quantitatum, tam numerice, quam ſymbolice: ſubinde de rationibus & proportionibus agitur; de poteſtatibus, & earum rationibus. Poſtremo applicantur doctrinæ ad reſolutionem problematum ſimplicium, & præſertim ad Series infinitas, doctrinam Combinationum, & Variationum omnium poſſibilium. Secunda pars de æquationibus altioribus tractat, ubi methodus reſolvendi omnes æquationes quadraticas, cubicas, biquadraticas, & cujuscunque generis aperitur, & per methodum limitum inveniuntur quæcunque Radices. Quibus probe intellectis omnia, quæ majoris momenti ſunt, in Arithmetica facile enucleari poſſunt, & ad Geometriam aditus fieri, quæ figurarum proprietates, & analogias ſubſidio Arithmeticæ ſæpe inveſtigat.

EDITOR LECTORI.

QUam grata fuerint hæc Elementa, deduci poteſt ex præclaro Eruditorum teſtimonio in Actis Lypſiæ Anno 1729., Menſe Martio. *Perquam utile, & elegans eſt hoc Arithmeticæ univerſæ Compendium, cui vix aliud non modo Italice, ſed & cæteris linguis conſcriptum præferendum videtur.*

Quare cum a multis exquireretur, neque exemplaria ſufficerent, diu rogavimus Auctorem, ut ſecundo ederet, atque ea, quæ ad complendum tractatum requiri videbantur, adderet, cui tandem animum advertens, addidit, quæ addenda cenſuit; maluit autem editionem eſſe latinam. Hanc tertio in lucem damus, ſenſus in priore latina dubios, claris, & captui tyronum maxime accomodis emendamus, ac erroribus Typographorum quam plurimis liberam, lectori hujus ſcientiæ utiliſſimæ cupido exhibemus.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

PARS PRIMA.

SECTIO I.

Definitiones.

I. Quantum dicitur, *quicquid* ex partibus componitur, veluti *linea*, *ſpatium*, *exercitus*. Hinc abſtractum nomen *Quantitatis* formari poteſt.

2. Si partes componentes exiſtunt ſimul, & conjunctæ, Quantitas dicitur *Continua*, ut *linea*, vel *ſpatium*. Si partes exiſtunt ſimul, ſed disjunctæ, tum dicitur *Diſcreta*, ut *exercitus*, & quodlibet rerum *aggregatum*, ſeu *numerus*. Si una alteri ſuccedit, quantitas dicitur *Succeſſiva*, ut *tempus*, *motus*.

3. Id, in quo non conſiderantur partes, dicitur *Unitas*, quæ aſſumitur tanquam primum numerandi principium, ad quod quascunque quantitates reducimus, ut communem omnium menſuram. Ita lineas menſuramus per unitatem linearem, ſuperficies per unitatem ſuperficialem, ſolida per unitates ſolidas. Unitas autem arbitraria eſt.

4. Aggregatum multarum unitatum proprie dicitur *Numerus*.

5. *Quantitas*, quæ in alia continetur, dicitur *Pars*, quæ continet, *Totum*.

6. Pars, quæ continetur exacte in toto, ſive quæ aliquoties repetita totum adæquat, dicitur *Aliquota*: ut 2. relative ad 4. Si bis continetur, dicitur pars *ſecunda*, vel *dimidia*, ſi ter, quater, &c. *tertia*, *quarta*, &c.

7. Quantitas relative ad ſuas partes aliquotas conſiderata, dicitur *multiplex*. Quoad duas aliquotas conſiderata dicitur *duplex*, quoad tres, *triplex*, &c.

8. Pars, quæ exacte non continetur in toto, eſt *Aliquanta*, ut 2. relate ad 5.

9. Pars quæcunque unitatis dicitur *Fractio*.

10. Quantitates, quarum eadem unitas menſura eſt, dicuntur *homogeneæ*, ut tres palmi, quatuor palmi, quorum communis menſura eſt unitas palmaris.

11. Si vero quantitates referantur ad diverſas unitates, ſunt *heterogeneæ*, ut tres palmi, & tres pollices, quorum primi menſurantur per unitatem palmarem, ſecundi per unitatem pollicis.

12. Numerus *primus* eſt ille, cujus nullus numerus eſt pars aliquota, ſed ſola unitas, ut 5. 7.

13. Numerus *compoſitus*, cujus præter unitatem eſt quoque alter numerus pars aliquota, ut 6., cujus partes aliquotæ ſunt 2. & 3.

14. Pars, quæ exacte continetur in duabus, aut pluribus quantitatibus, eſt *aliquota communis*.

15. Numeri *inter ſe primi* dicuntur, quorum nulla eſt pars communis aliquota præter unitatem, ut 5. 7.

16. Numeri vero *inter ſe compoſiti*, quorum præter unitatem aliquis numerus pars communis aliquota eſt, ut 6. 4., quorum aliquota communis eſt 2.

17. Numerus *Par*, qui dividi poteſt in duos æquales numeros, ut 6., ſecus eſt *Impar*, ut 7.

18. Quantitates, quarum relatio ad unitatem poteſt exprimi numeris, dicuntur *Numericæ Rationales*, *Commenſurabiles*. At quæ, licet per lineam poſſint, non poſ-

poſſunt tamen exprimi numero, dicuntur *Surda*, *Irrationales*, *Incommenſurabiles*, ut ſuo loco explicabitur.

19. Scientia, quæ de quantitatibus numericis tractat, dicitur *Arithmetica*, a voce græca Arithmos, quæ numerum ſignificat. Quæ, ſi numeros tractat ſub ſpeciebus, vel literis, dicitur *ſpecioſa*, *univerſalis*, aut *literalis*.

20. *Algorithmus* eſt methodus quantitates Arithmeticas determinandi, cujus quatuor ſunt officia: *Addere*, *Subtrahere*, *Multiplicare*, *& Dividere*.

21. Per Additionem determinatur totum, quod ex datis partibus componitur. Per ſubtractionem differentia inter duas quantitates. Multiplicando determinatur productum, quod fit ex quantitate aliquoties ſumpta. Demum dividendo invenitur, quoties una quantitas in alia contineatur. Numerus, qui dividi debet, dicitur *Dividendus*; ille, per quem dividitur, dicitur *Diviſor*, & qui indicat, quoties unus in alio contineatur, eſt *Quotus*, ſeu *Quotiens*.

22. *Axioma* eſt propoſitio per ſe nota.

23. *Theorema* eſt propoſitio doctrinalis.

24. *Problema* eſt propoſitio practica, quæ debet reſolvi.

25. *Lemma* eſt Theorema ordinatum, tanquam medium ad aliud demonſtrandum.

26. *Corollarium* conſequitur immediate ex aliquo Theoremate, vel Problemate.

27. *Demonſtratio* eſt explicatio rationum, ex quibus certe, & evidenter aliqua propoſitio deducitur.

DE PRIMO ALGORITHMO NUMERICO.

CAPUT I.

VEriſimile eſt, primas hominum numerationes ex digitis incepiſſe. Illud quidem obſervatur, quod quælibet Natio numerationem non ultra denarium producat, qui eſt digitorum numerus; ad quem cum pervenerint, rurſus ab unitate incipiunt. Quod etiam Arabibus proprium, a quibus, ut notavimus, methodus, quæ nunc in uſu communi eſt, computandi originem habuit. Prima arbitraria quantitas dicitur *Unum*, ſi ipſi addatur alia æqualis, fiunt *Duo*, ſi alia ſuperaddatur, fiunt *Tria*, ſic *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*. Poſt quæ rurſus ab unitate incipimus, quæ addita denario dat *Undecim*, & duæ unitates additæ denario, dant *Duodecim* &c. uſque ad bis decem, quod vocamus *Viginti*. Sic ter decem vocamus *Triginta* uſque ad decies decem, quod *Centum* dicitur. *Decies* centum: *Mille*, & decies centena *millia*: *Millionem*; Millionem vero Millionis *Billionem*, & Millionem Billionis *Trillionem* dicimus. Sic fit *Quadrillio*, *Quinquillio* &c.

Ut autem numerus quicunque exprimeretur, cyphras quasdam, ſive characteres invenere, quibus numerus quilibet exprimeretur, quod quidem per ſolas decem cyphras factum eſt; ut videre eſt in tabula ſequenti.

Zerus	0.	Quinque	5.
Unum	1.	Sex	6.
Duo	2.	Septem	7.
Tria	3.	Octo	8.
Quatuor	4.	Novem	9.

Ut

Ut autem per ſolas hujusmodi cyphras quilibet numerus poſſet repræſentari, inſtituta eſt quædam ſeries, ea lege, ut cyphræ, quæ in prima claſſe eſſent, procedendo a dextra ad ſiniſtram, (ut eſt mos ſcribendi Orientalibus) ſignificarent ſimplices *Unitates*, quæ eſſent in ſecunda claſſe, *Decades*, quæ in tertia, *Centenarios*, & ſic in ratione decupla valores excreſcerent, ut in tabula ſequente.

Decades billionum	Billiones	Centenarii millenariorum millionum	Decades millenariorum millionum	Millenarii millionum	Centenarii millionum	Decades millionum	Milliones	Centenarii millenariorum	Decades millenariorum	Millenarii	Centenarii unitatum	Decades unitatum	Unitates
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Ex qua inſtitutione ſequitur methodus generalis numerandi.

Sit enim enumeranda quantitas:

$$2\;3\;4\;\overset{'''}{5}\;6\;\underset{,}{7}\;8\;9\;3\;\overset{''}{2}\;3\;\underset{,}{4}\;5\;6\;7\;\overset{'}{8}\;9\;\underset{,}{1}\;3\;4\;5$$

Diſtinguatur numerus in claſſes, & quælibet claſſis contineat cyphras ſex, incipiendo a dextra ad ſiniſtram. Tum ad primam cyphram ſecundæ claſſis ponatur una linea; ad primam tertiæ duæ lineæ, ad primam quartæ tres, & erunt in prima claſſe Unitates, in ſecunda Milliones, in tertia Billiones, in quarta Trilliones &c.

Sic

Poſito B ſub A, ut eſt in figura, addantur primo unitates, ſumma unitatum 8 ſcribatur infra unitates numeri A & B, ſumma decadum 6, infra decades, ſumma centenariorum 6, infra centenarios, denique ſumma millenariorum 7, infra millenarios locetur, eritque ſumma omnium C, ut ex Axiomate patet.

2. Quodſi unitates additæ accreſcant in decades, ſolæ unitates, aut zerus ſcribendus eſt, rejectis decadibus ad ſeriem ſequentem decadum. Idem eſt de centenariis, millenariis, &c.

Sint igitur addendi M, & N

Numeri	M	4 6 8 9
Addendi	N	3 8 5 4
Summa	P	8 5 4 3

Cum unitates additæ ſint 13, ſcripto 3, una decas ſequentibus decadibus addatur, quæ erunt 14, ſcriptis ergo 4, decas iterum addatur centenariis, qui propterea erunt 15, denique ſcripto 5, decas addatur millenariis, eruntque 8 millenarii. Quare ſumma quæſita erit P.

PROBLEMA II.

Subtrahere Numeros.

1. NUmerus ſubtrahendus ponatur ſub numero, ex quo eſt ſubtrahendus, eo ordine, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus &c.

2. Auferantur unitates ab unitatibus, & notetur reſiduum ſub unitatibus; porro decades a decadibus, & ſic proſequendo, eritque aggregatum omnium reſiduorum, reſiduum, quod quæritur.

Ex numero A ſit ſubtrahendus numerus B.

A	7	3	7
B	3	1	4
C	4	2	3

Cum 4 a 7 auferantur, differentia unitatum manebit 3, quæ infra unitates ſcribatur, notetur porro in loco decadum differentia, nempe 2. Denique differentia centenariorum, quæ eſt 4, in loco centenariorum ſcribatur.

Differentia ergo, ſive reſiduum quæſitum eſt C, nempe 4 centenarii, 2 decades, & 3 unitates.

3. Si cyphra inferior ſit ſuperiore major, ſuperior augeatur decade, dein fiat ſubtractio. Tum vero decas claſſis ſequentis concipienda erit unitate minor.

N	4	3	2
M	1	4	6
Q	2	8	6

Sic, ſit e numero N ſubtrahendus numerus M. Quoniam 6 unitates ſubtrahi non poſſunt a 2 unitatibus, ſubtrahuntur a 12, & reſiduum erit ſex. Erunt ergo ſubtrahendæ 4 decades a 2 decadibus, ſed 4 a 2 ſubtrahi non poſſunt, ergo addita decade ſubtrahantur a 12, erit reſiduum 8, denique 1 ſubtrahatur a 3, eritque reſiduum 2. Reſiduum ergo quæſitum eſt Q.

SCHOLION.

AD probandam additionem, vel potius ſummam, adhiberi ſolet ſubtractio; ad probandam vero ſubtractionem, additio. Nam ſi M plus N æquetur P: ergo P minus N æquatur M. E contra ſi P minus N æquatur M; P æquatur M plus N.

PRO-

PROBLEMA III.

Multiplicare Numeros.

CUm varii caſus occurrere poſſint, a facilioribus incipiendum eſt.

1. Sit multiplicanda una cyphra per unam cyphram; in tali caſu facile invenitur productum. Ita ſi 2 multiplicetur per 3 productum erit 6.

2. Sint duæ multiplicandæ per unam, multiplicentur primo unitates, deinde decades; & aggregatum productorum erit quæſitum productum.

Ut ſi A debeat	A	3	2
multiplicari per B,	B		2
erit productum C	C	6	4

3. Si ſint tres cyphræ, aut quotcunque multiplicandæ per unam, multiplicentur ſingulæ una poſt aliam, incipiendo ab unitatibus, & quælibet producta in ſua claſſe ſcribantur.

4. Quod ſi aliquod productum ſuperat 9, transferantur decades in claſſem ſequentem.

5. Sint duæ cyphræ multiplicandæ per duas, ut in figura.

Numerus multiplicandus	A		4	2
Numerus multiplicans	B		2	3
Productum primum	C	1	2	6
Productum ſecundum	D	8	4	
Productum totale quæſitum	E	9	6	6

Multiplicetur primo numerus A per primam cyphram 3, quæ, quoniam ſunt unitates, ponatur productum C in claſſe unitatum. Multiplicetur porro per ſecundam cyphram 2, & quoniam 2 ſunt decades, ſcribatur productum D in claſſe decadum. Tum addantur producta, & erit E productum totale quæſitum.

6. Si tres ſint multiplicandæ per tres, multiplicetur totus numerus datus per cyphras ſingulas numeri multiplicantis, & productum primum in prima claſſe ponatur, ſecundum in ſecunda, tertium in tertia &c. & ſumma productorum erit quæſitum productum.

Eadem eſt methodus, ſi quatuor cyphræ multiplicandæ ſint per quatuor, quinque per quinque &c.

PROBLEMA IV.

Numeros dividere.

1. SI una cyphra ſit dividenda per unam cyphram, tum facilis eſt diviſio. Nam cum dividere e. g. 8 per 2, idem ſit, ac quærere, quoties 2 continetur in 8, facile invenitur *Quotus* 4.

2. Si duæ cyphræ ſint dividendæ per unam, divido unam poſt aliam, ſed incipiendo a ſiniſtra. Ita ſi A debeat dividi per B.

Numerus dividendus	A	6	4
Diviſor	B	2	
Quotus primus		3	
Quotus ſecundus		2	
Quotus totalis	3	2	

Divido primum 6 per 2, & quoniam dividuntur decades, quotus quoque 3 erit in claſſe decadum ſcribendus. Tum divido 4 per 2, & quia dividuntur unitates, quotus 2 erit, ita tamen, ut quilibet ad ſuam claſſem veniat. Conjungantur ſimul quoti inventi in claſſe unitatum, & fiet 3 2 quotus quæſitus; nempe 3 decades, & 2 unitates.

Eadem

Eadem methodo utendum, ſi tres, vel quatuor, vel quotcunque cyphræ ſint dividendæ per unam.

Sint autem duæ dividendæ per duas.

Numerus dividendus	A	4	6
Diviſor	B	2	3
Quotus 2			

Obſervetur, quoties prima cyphra diviſoris contineatur in prima cyphra dividendi, & notetur quotus. Sic quoniam 2 continetur bis in 4; notetur quotus 2. Tum quæratur, an totus diviſor contineatur bis in dividendo, quod fit multiplicando diviſorem per quotum 2; & quoniam productum eſt 46, concludetur illum exacte bis contineri; nempe quotum eſſe 2.

Quod ſi productum eſſet majus, tum quotus aſſumptus erit major, quam conveniat, ac proinde unitate erit minuendus. Sic, ſi dividi debeat 45 per 23, verum quidem eſt, decades 2 contineri bis in decadidus 4, & earum quotum eſſe 2. Sed totus diviſor non continetur bis in dividendo. Nam multiplicato diviſore per 2 fit 46.

4. Si tres cyphræ ſint dividendæ per duas, divido primum duas incipiendo a ſiniſtra, & noto quotum, ſecundo: multiplico totum diviſorem per inventum quotum; tertio: ſubtraho productum a diviſore. Reſiduo addo ſequentem cyphram, & repeto eodem modo diviſionem.

Sit uumerus A	A	7	6	8
Dividendus per B	B	2	4	

Dividatur primo 7 6 per 2 4, reperietur primus quotus 3

Pars prima	7	6
Diviſor	2	4
Quotus primus		3

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Multiplicetur deinde 24 per 3, & factum 72, ſubtrahatur a 76, reſiduum erit 4.

Notato 4 addatur illi 8, & erit

Pars ſecunda dividenda	48
Diviſor	24
Quotus ſecundus	2
Reſiduum ſecundum	0

Quotus vero totalis eſt 32.

Solet autem diviſio hoc modo etiam ſcribi, ut figura exhibet, ne ſcilicet quoti per varias operationes inventi, primo conſcribi debeant.

Dividendus	48	24 Quoti.
Diviſor 2	22	
	48	

5. Si tres cyphræ dividendæ ſint per tres cyphras, dividatur ſemper prima ſiniſtra per primam diviſoris ſiniſtram, & probetur, an totus diviſor toties contineatur in toto dividendo, quoties prima cyphra continetur in prima. Quod ſi productum fiat majus, minuatur quotus unitate, vel binario, &c.

6. Eadem methodo quatuor cyphræ dividentur per tres, & quinque per quatuor: & intellecta methodo in caſibus ſimplicioribus, facile erit eam applicare ad quemlibet alium.

SCHOLION.

Multiplicatio diviſione probatur, & diviſio multiplicatione. Etenim ſi multiplicando 2 per 3 fiat 6; dividendo ergo 6 per 2 fiet 3.

E contrario, ſi dividendo 6 per 3, quotus ſit 2. Ergo multiplicando 3 per 2 fiet 6.

DE

Digitized by Google

DE PRIMO ALGORITHMO LITERALI.

CAPUT II.

QUemadmodum per Arabicos characteres exprimuntur quantitates determinatæ, ita per literas exprimuntur indeterminatæ.

Antequam hujuscemodi methodos explicemus, notabimus primo, quæſtionem, quæ proponi poteſt, vel eſſe *poſſibilem*, vel *impoſſibilem*. Poſſibilem, e. g. ſi quæratur dimidium de 6, impoſſibilem, ſi quæratur dimidium de 6, quod ſit numerus par.

Cum quæſtio eſt poſſibilis, triplex ei quantitas reſpondere poteſt. Vel enim ei reſpondet quantitas poſitiva, vel quantitas negativa, vel nulla. E. g. Si quæratur: quantum Petrus pecuniæ habeat? tria dari poſſunt; vel ut aliquid habeat, vel ut non ſolum non habeat, imo aliquid debeat; vel ut nec habeat, nec debeat. In primo caſu pecunia Petri dicitur poſitiva, in ſecundo negativa, in tertio æqualis nihilo.

Ita, ſi quæratur, quantum ſpatii peragratum fuerit ab aliquo mobili verſus dextram; ſi revera illud duas hexapedas ad hanc partem confecerit, motus ejus erit poſitivus. At ſi non ſolum non progreſſum ſit verſus dextram, ſed e contrario verſus ſiniſtram, motus erit negativus. Si vero neque ad dextram, neque ad ſiniſtram, ſed in quiete permanſerit, motus fiet æqualis nihilo, ſeu nullus.

Quantitates poſitivæ exprimuntur ſigno +, vel etiam ſine ſigno in principio operationis.

Signum = exprimit æquale. Signum > majus, ſignum < minus; & ∞ infinitum.

AXIOMA FUNDAMENTALE.

QUantitas poſitiva cum quantitate negativa æquali æquatur nihilo, ſeu o. Sic $4 - 4 = 0$, $a - a = 0$, $b - b = 0$.

PROBLEMA I.

Addere Literas.

1. QUantitates in una ſerie cum ſuis ſignis ſcribantur.

2. Literæ ejusdem ſpeciei colligantur in unam; ſi ſigna habuerint æqualia, illud ipſum præfigatur, ſi diverſa, illius literæ ſignum præfigendum, quæ eſt major.

EXEMPLUM I.

Literæ	a	$+ 3a$	$- 3a$
Addendæ	b	$- 3a$	$+ 2a$
Summæ	$a + b$	$+ 3a - 3a$	$- 3a + 2a$
Summæ reductæ	$a + b$	o	$- a$

EXEMPLUM II.

Literæ	$3a$	$+ 7c$	$- 3a$
Addendæ	$4a$	$- 7c$	$- 2a$
Summæ	$7a$	o	$- 5a$

PRO-

PROBLEMA II.

Literas ſubtrahere.

1. SCribantur in una ſerie, ſed in iis, quæ ſubtrahentur, mutentur ſigna ante operationem.
2. Fiant omnia ea, quæ in additione dicta ſunt.

EXEMPLUM I.

Literæ datæ	a	$+ 8a$	$- 4c$
Literæ ſubtrahendæ	b	$+ 8a$	$+ 3c$
Literæ ſubtrahendæ mutatis ſignis	$- b$	$- 8a$	$- 3c$
Differentiæ reductæ	$a - b$		$- 7c$

EXEMPLUM II.

Literæ datæ	$3d$	$+ 3d$	$+ 4c$
Literæ ſubtrahendæ	$4c$	$+ 3d$	$+ 7c$
Literæ ſubtrahendæ mutatis ſignis	$- 4c$	$- 3d$	$- 7c$
Differentiæ reductæ	$3d - 4c$		$- 3c$

Quantitas literalis ſola dicitur *Monomia*, ut a. Cum duæ junguntur vel ſigno $+$, vel $-$, tum fit *Binomia*, ut $a + b$, vel $a - b$; cum tres junguntur, *Trinomia*, ut $a + b + c$, vel $a + b - c$. Univerſaliter cum plures *Polynomia*.

PROBLEMA III.

Multiplicare Literas.

MUltiplicatio exprimitur vel cum ſigno $\times$, vel puncto interjecto, vel etiam ſine ſigno, quod uſitatius eſt, jungendo literas.

Sciendum vero, quodnam ſignum præfigi debeat producto. Quare quatuor caſus ſunt diſtinguendi.

 1. Cum

1. Cum multiplicatur poſitiva quantitas per poſitivam pariter quantitatem. 2. Cum negativa per negativam. 3. Cum poſitiva per negativam. 4. Cum negativa per poſitivam.

Quoniam vero quantitatem multiplicare idem eſt, ac aliquoties illam repetere; ſi poſitiva aliquoties repetitur poſitive, clarum eſt, fieri ſemper quantitatem poſitivam. At ſi negativa repetatur aliquoties poſitive, fiet ſemper negativa. Sic pariter, ſi poſitiva aliquoties negetur, fiet aliquid negativum.

Sed cum aliquid negativum aliquoties negative ſumere, idem ſit, ac negare negativum aliquoties. Neceſſario exurget quantitas poſitiva. Ex quibus ſequentes regulæ deductæ ſunt:

1. Poſitivum per poſitivum dat +
2. Poſitivum per negativum dat −
3. Negativum per poſitivum dat −
4. Negativum per negativum dat +

Hinc ſigna diverſa ſemper dant −, ſigna æqualia +

Quantitatem monomiam per monomiam multiplicare.

Jungantur ſimul literæ, & præponatur producto ſignum juxta ſupradictas regulas conveniens.

Monomia	a	$+a$	$-a$	$-a$
	b	$-b$	$+b$	$-b$
Producta	$+ab$	$-ab$	$-ab$	$+ab$

Monomium per Binomium.

Multiplicetur utraque litera, tum addantur producta, ut in numeris

Binomium multiplicandum	$a+b$
Monomium multiplicans	c
Productum primum	ac
Productum ſecundum	bc
Productum totale	$ac+bc$

Bino-

Binomium per Binomium.

Multiplicetur binomium datum tam per primam literam alterius, qnam per ſecundam

Binomium multiplicandum	$a+b$
Binomium multiplicans	$c+d$
Productum primum	$ac+bc$
Productum ſecundum	$ad+bd$
Productum totale	$ac+bc+ad+bd$

Exemplum ſecundum.

Binomium multiplicandum	$a+b$
Binomium multiplicans	$a-b$
Productum primum	$aa+ab$
Productum ſecundum	$-ab-bb$
Productum totale	$aa-bb$

Exemplum tertium.

Trinomium multiplicandum	$a-b+c$
Binomium multiplicans	$a+b$
Productum primum	$aa-ab+ac$
Productum ſecundum	$+ab-bb+bc$
Productum totale	$aa-bb+ac+bc$

Eadem methodus in quibuſcunque Polynomiis.

PROBLEMA IV.

Literas dividere.

Monomium per Monomium.

1. Sit a dividendum per b.
Scribatur $a : b$, vel $\frac{a}{b}$

2. De-

2. Deleantur literæ communes tam dividendo, quam diviſori, ut in figura ſequente:

Dividendi	aa	abc	aac
Diviſores	ab	ab	aac
Quoti primi	$\frac{aa}{ab}$	$\frac{abc}{ab}$	$\frac{aac}{aac}$
Quoti ſimplices	$\frac{a}{b}$	c	$\frac{1}{1}$

3. Præfiguntur autem ſigna convenientia quotis juxta regulas multiplicationis

Dividendi	aac	$-aabb$	$-aabb$
Diviſores	$-aa$	ab	$-ab$
Quoti	$-c$	$-ab$	$+ab$

Binomium per Monomium.

Dividantur ambæ partes Binomii, & ſumma quotorum erit quotus quæſitus.

Binomium dividendum $ab + ae$

Monomium dividens a | quotus primus

Pars prima dividenda ab | b. Eodem mo-

Diviſor a | do habetur ex

Productum primum ab | ac quotus c, to-

Reſiduum 0 | talis vero $b + c$.

Binomium per Binomium.

Dividatur prima pars unius, per primam partem alterius, & procedatur ut in numeris

Binomium dividendum	$aa - bb$
Binomium dividens	$a + b$
Pars prima dividenda	aa
Diviſoris pars prima	a
Quotus primus	a
Productum primum	$aa + ab$
Reſiduum primum	$-ab$

Pars

Pars ſecunda dividenda	$-ab-bb$
Diviſor	$a+b$
Quotus ſecundus	$-b$
Productum ſecundum	$-ab-bb$
Reſiduum ſecundum	0
Quotus totalis quæſitus	$a-b$

Trinomium per Binomium.

Trinomium dividendum	$aa+2ab+bb$
Binomium dividens	$a+b$
Pars prima dividenda	aa
Diviſor	$a+b$
Quotus primus	a
Productum primum	$aa+ab$
Reſiduum primum	ab
Pars ſecunda dividenda	$ab+bb$
Diviſor	$a+b$
Quotus ſecundus	$+b$
Productum ſecundum	$ab+bb$
Reſiduum	0
Quotus ergo totalis	$a+b$

Si ultimum reſiduum non ſit o, tunc quantitas non erit exacte diviſibilis per datam quantitatem, & in tali caſu exprimetur diviſio, ut factum eſt in Monomiis.

Sic ſi $ab+cd$ dividi debeat per bb: quoniam exacte dividi non poteſt, ſcribatur $\frac{ab+cd}{bb}$

Eadem methodus in Polynomiis majoribus.

DE

DE POTESTATIBUS ARITHMETICIS ET EARUM RADICIBUS.

CAPUT III.

SI multiplicetur unitas 1 per quemcunque numerum, e. g. 2 fit productum 2; hoc productum rurſus multiplicetur per 2, & fiet ſecundum productum 4; & hoc iterum per 2, ut fiat tertium productum 8, & ita porro ut figura exhibet.

Unitas	1.		
Productum primum	1. 2.	=	2.
Secundum	1. 2. 2.	=	4.
Tertium	1. 2. 2. 2.	=	8.
Quartum	1. 2. 2. 2. 2.	=	16.
Quintum	1. 2. 2. 2. 2. 2.	=	32.
Sextum	1. 2. 2. 2. 2. 2. 2.	=	64.
Quodcunque	1. 2. 2.		

Hujusmodi producta dicta ſunt a Veteribus *Poteſtates*, ſeu *Dignitates* Arithmeticæ. Quantitas vero, per quam fit multiplicatio *Radix*, aut *Latus*.

Productum primum eſt ipſa quantitas multiplicans; & vel ideo dicitur etiam Radix, aut Latus. Productum ſecundum dictum eſt *Quadratum*, tertium *Cubus*, quartum *Superſolidus primus*, quintum *Quadratocubus*, ſextum *Superſolidus ſecundus* &c.

Unitas vero dicitur poteſtas *Nulla*; quia aſſumendo unitatem, cum unitas nondum multiplicata ſit per aliam quantitatem, nondum facta eſt ulla poteſtas.

Radix vero ſecundum quod ad diverſas poteſtates refertur, nomen mutat. Relative enim ad poteſtatem ſecundam dicitur Radix *ſecunda*, aut *quadrata*. Relative ad tertiam Radix *tertia*, aut *cubica*, ad *quartam quarta*, ad *quintam quinta* &c.

Quæ-

Quærere ergo radicem ſecundam numeri 4, idem eſt, ac quærere numerum, qui per duas multiplicationes incipiendo ab unitate producat 4; & hic reperitur eſſe 2. Quærere radicem tertiam de 8, idem erit, ac quærere numerum, qui per tres multiplicationes faciat 8, qui pariter eſt 2. Et ſi quæratur radix quarta de 16, quæretur numerus, qui per quatuor multiplicationes producat 16, qui eſt 2.

COROLLARIUM I.

EX quibus ſequitur, non cujuſcunque numeri inveniri ſemper poſſe numerum, qui ſit quæſita radix. Sic aſſignari non poteſt in numeris quarta radix numeri 17, quia nullus eſt numerus, qui per quatuor multiplicationes producat 17; imo nec radix tertia, aut ſecunda; quia nullus numerus eſt, qui per duas, vel tres multiplicationes 17 producat.

At numeri 16 poteſt & ſecunda radix aſſignari, quæ eſt 4; & pariter radix quarta, quæ eſt 2. Nam ſi unitas multiplicetur per 4, & productum 4 iterum multiplicetur per 4, fit 16, idem erit, ſi quatuor fiant multiplicationes per 2.

COROLLARIUM III.

EX his colligitur, diſtingui debere duo radicum genera, genus irrationalium, aut ſurdarum, & genus rationalium, aut numericarum. Sic radix quadrata de 18 eſt radix ſurda, quia numeris non poteſt exprimi, radix vero quadrata de 16 eſt rationalis, quia numeris poteſt exhiberi, & eſt 4. Sic radix cubica de 20, eſt radix ſurda; at radix cubica de 27 eſt rationalis, nempe 3.

Quemadmodum autem dantur quantitates, quarum ſunt radices vel *Irrationales*, vel *Rationales*; ita dan-

dantur quantitates, quarum nulla omnino eſt radix, neque eſſe poteſt.

Ita ſi quæratur radix quadrata de − 8, radix eſt impoſſibilis. Cum nulla aſſignari poſſit quantitas, quæ per ſe producat quantitatem − 8. Vel enim hæc quantitas eſt poſitiva, vel negativa. At quoniam poſitivum multiplicatum per poſitivum dat poſitivum, impoſſibile erit, ut hujuscemodi quantitas per ſe producta faciat negativam quantitatem, & producat − 8. Similiter ſi eſt negativa, negativum enim multiplicatum per negativum dat poſitivum, ac proinde impoſſibile erit, ut producat − 8. Si ergo inveniatur aliqua quantitas, quæ ſit radix quadrata de − 8, erit ea quantitas impoſſibilis. Quo argumento conficitur, radicem propoſitam eſſe impoſſibilem.

Talis quoque erit radix biquadratica quantitatum negativarum, ut radix biquadratica quantitatis − 8; & tales generaliter quæcunque radices, quorum exponens eſt numerus par, ſi quantitas, ex qua extrahi debent, ſit negativa.

Hujusmodi radices vocantur *Impoſſibiles*, aut *Imaginariæ*, quorum tamen eſt maximus uſus in Arithmetica, & Geometria. Nam in Arithmetica demonſtrant impoſſibilitatem Problematum, & in Geometria flexus, & curvaturas curvarum.

Ex quibus infertur differentia inter radices rationales, irrationales, & imaginarias.

Rationales enim ſunt eæ, quæ in numeris exhiberi poſſunt. *Irrationales*, quæ quidem non poſſunt exhiberi in numeris, ſed per figuras geometricas exhibentur in lineis. Demum *Imaginariæ*, quæ neque in numeris poſſunt exhiberi, neque in lineis; cum ſint quantitates repugnantes, & quæ contradictionem

in

involvunt. Cujuscunque autem generis radices exprimi ſolent per ſignum $\sqrt{}$ appoſito numero ſuper ſignum, quo indicatur ordo radicis. Sic $\sqrt[2]{12}$ ſignificat radicem ſecundam, ſive quadratam numeri 12. $\sqrt[3]{12}$ ſignificat radicem tertiam, ſive cubicam. $\sqrt[4]{12}$ radicem quartam, ſive biquadraticam. $\sqrt[2]{-12}$ radicem quadratam quantitatis -12, quæ imaginaria eſt. $\sqrt[4]{-12}$ radicem quartam, quæ pariter eſt imaginaria. Si vero $\sqrt{}$ nullus ſuperſcriptus eſt numerus, intelligitur, ſemper eſſe radicem quadratam.

Tabula poteſtatum in numeris.

Unitas	Poteſtates primæ	Secundæ	Tertiæ	Quartæ
1	1	1	1	1
1	2	4	8	16
1	3	9	27	81
1	4	16	64	256
1	5	25	125	625
1	6	36	216	1296
1	7	49	343	2401
1	8	64	512	4096
1	9	81	729	6561
1	10	100	1000	10000

Tabula poteſtatum literalium.

Unitas	Primæ	Secundæ	Tertiæ	Quartæ
1	*a*	*aa*	*aaa*	*aaaa*
1	*ab*	*aabb*	*aaabbb*	*aaaabbbb*
1	*abc*	*aabbcc*	*aaabbbccc*	*aaaabbbbcccc*
1	*aa*	*aaaa*	*aaaaaa*	*aaaaaaaa*

PROBLEMA I.

Extrahere radicem quadratam ex dato quadrato.

Sit primo binomium $a + b$, & per ſe ipſum multiplicetur, fiet ejus quadratum $aa + 2ab + bb$ cujus tria ſunt elementa; nempe aa quadratum primæ literæ, $2ab$ productum ex dupla prima in ſecundam, & bb quadratum ſecundæ.

Ex his elementis oritur methodus radicem quadratam binomiam extrahendi ex quocunque quadrato binomio.

Sit enim aliquod quadratum binomium $xx + 2xy + yy$.

Quoniam xx eſt quadratum primæ literæ, ejus radix x erit prima litera radicis; ſubtracto elemento xx, fit reſiduum $2xy + yy$. Et quoniam in hoc datur productum ex dupla prima in ſecundam, dividatur $2xy$ per $2x$, & erit quotus ſecunda litera y. Tum multiplicetur y per $2x$, addaturque quadratum yy, ut fiat $2xy + yy$. Et cum ſubtrahendo hæc elementa fiat reſiduum o. Erit $x + y$ quæſita radix quadrata, ut ſequens exemplum exhibet.

Quadratum datum	$xx + 2xy + yy$ | prima litera x
Elementum ſubtractum	xx
Reſiduum primum	$2xy + yy$
Diviſor	$2x$ | ſecunda litera $+ y$
Elementa ſubtrahenda	$2xy + yy$
Reſiduum ſecundum	o
Radix binomia extracta	$x + y$

Sit ſecundo trinomium $a + b + c$, eritque ejus quadratum $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$, cujus hæc ſunt elementa; aa quadratum primæ literæ, $2ab$ pro-

produċtum ex dupla prima in ſecundam, bb quadratum ſecundæ, $2ac+2bc$; nempe produċtum ex ſumma dupla duarum in tertiam, denique cc quadratum tertiæ.

Ex quibus elementis oritur methodus extrahendi radicem trinomiam.

Sit enim quodcunque quadratum trinomium $xx+2xy+yy+2xz+2yz+zz$.

Cum ſit xx quadratum primæ, erit x prima radicis. Subtraċto xx, dividatur $2xy$ per $2x$, & prodit ſecunda $+y$. Subtraċtis $2xy+yy$, fit reſiduum $2xz+2yz+zz$; tum diviſo primo termino per $2x+2y$, prodit tertia litera z. Subtraċtisque elementis $2xz+2yz+zz$, reſiduum fit o. Quare radix trinomia quæſita eſt $x+y+z$. Eadem methodo extrahantur quadrinomiæ, &c.

Applicatio methodi ad numeros.

INtelleċta extraċtione radicis quadratæ in literis, haud difficulter intelligetur extraċtio radicis numericæ. Eadem enim elementa ſunt in quadrato numerico, quæ literali, eadem proinde omnino etiam methodus radicem extrahendi ſit, eſt neceſſe: priusquam tamen hanc aggrediamur, pauca præmittenda ſunt.

1. Quemlibet numerum pluribus conſtantem cyphris, in duas, aut plures reſolvi poſſe cyphras, manente eodem valore; ſic e. g. 32 eſt $= 30+2$, & 182 eſt $= 180+2$, vel $100+80+2$, & ſic de aliis.

Hinc ſequitur, quod quadratum numericum binomium, trinomium, &c. eodem modo generetur, quo generari per literas ſuperius vidimus; placet id exemplo comprobare: ſit producendum quadratum

ex radice 32. Dividatur ergo in duas partes, e. g. in 30 + 2, Sit præterea 30 = a, 2 = b, erit 30 + 2 = $a + b$. Fiat jam ex utroque quadratum, ut figura exhibet :

Radix.	$a+b$	=	30 + 2	
	aa	=	30 . 30	= 900
	$2ab$	=	60 . 2	= 120
	bb	=	2 . 2	= 4
Q. de	$a+b$	=	Q. de 30+2	= 1024

En partes easdem, eademque elementa in numeris, quæ in literis conſpiciuntur.

Idem patet in quadrato trinomio. Sit radix trinomia 182 = 100 + 80 + 2 = $a + b + c$.

Radix	$a+b+c$	=	100 + 80 + 2	
	aa	=	100 . 100	= 10000
	$2ab$	=	200 . 80	= 16000
	bb	=	80 . 80	= 6400
$(2a+2b)c$ =	$2ac$	=	200 . 2	= 400
	$2bc$	=	160 . 2	= 320
	cc	=	2 . 2	= 4
Q. de	$a+b+c$	=	Q. de 100 + 80 + 2	= 33124

Obſervandum autem, quod maxima radix monomia 9, quadratum ſuum non extendat ultra duas cyphras, nempe 81; maxima radix binomia, quæ eſt 99, quadratum ſuum non ultra quatuor, maxima trinomia 999 non ultra ſex, maxima quadrimonia non ultra octo.

Ex quibus ſequitur, quod ſi detur quadratum, in quo cyphræ ſunt plures, quam duæ, habebit radicem majorem monomia; & ſi habeat plures, quam quatuor, erit radix ejus major radice binomia.

Hinc

Hinc orta eſt regula cognoſcendi ſpeciem radicis cujuscunque quadrati numeri. Scilicet: dividantur cyphræ quadrati dati in claſſes, principio facto in parte dextra, & cuilibet claſſi aſſignentur cyphræ binæ, ultima excepta, quæ etiam unica cyphra conſtare poteſt; quot igitur futuræ ſunt claſſes, tot in quæſita radice erunt cyphræ. Sic, quia 19 | 24 | conſtat duabus claſſibus, radix erit binomia; quia 3 | 31 | 24 | in tres dividitur claſſes, radix erit trinomia. ſic numeri 23 | 45 | 67 | 89 radix erit quadrinomia, &c.

His intellectis ipſam extractionem aggredimur, poſita ob oculos formula generali algebraica; $aa + 2ab + bb$, cujus ope mira facilitate radices quadratas quascunque extrahere licet.

1. Sit datus numerus 10 | 24 | ex quo extrahenda ſit radix quadrata. Cum claſſes, facta diviſione, duæ reperiantur, infertur radicem fore binomiam; quæratur igitur in numero claſſis ſiniſtimæ, nempe 10, quadratum maximum, quod repræſentatur in formula noſtra per aa, quod cum reperiatur eſſe 9, cujus radix eſt 3, erit 3 radicis binomiæ quæſitæ pars prima, quæ bene per a repræſentatur; quadratum de 3, id eſt 9, ſubtrahatur a 10, relinquitur ſubtractione facta 1, huic ex claſſe ſequente adjungatur numerus 2, ut fiat 12, quod repræſentatur per $2ab$; in hoc porro cum contineri debeat duplum partis primæ radicis multiplicatum per ſecundam partem, fiat ex numero 3 duplum, id eſt 6, per 6 dividatur 12, erit quotus 2 ſecunda pars radicis, quæ repræſentatur per b. Multiplicetur jam 6 per 2, factum 12 ſubtrahatur a 12, erit reſiduum = 0. Verum quia ex numero dato adhuc reſtat 4 repræſentatum per bb, in quo contineri debet quadratum ex 2, fiat quadratum ex 2, nempe 4, hoc ſubtracto a 4, cum

nihil ſit reſiduum, erit radix binomia 32, ſeu 30 + 2 = $a + b$ radix quadrata vera numeri dati 1024.

Quod ſi probare velis, quod ſemper fieri debet, an radix reperta ſit vera radix numeri dati, nulla alia re opus eſt, quam ut ex radice fiat quadratum; quod ſi enim quadratum ex hac radice ſit æquale numero dato, radix reperta vera erit; ſi vero quadratum ex radice factum ſit majus, quam datus numerus, radix erit vera major, conſequenter cyphra ſecunda, aut tertia, &c. radicis inventæ aliquo numero minuenda eſt, atque adeo tota extractio repetenda erit.

Hac eadem methodo radix trinomia, idem eſt de quacunque polynomia, extrahi poterit, hoc ſolum prænotato: quod ubi duæ partes radicis repertæ fuerint, pro reperienda tertia parte, duæ illæ partes per modum unius partis radicis conſiderari debeant; unde fiet, ut eodem modo extractio radicis continuari poſſit, quo radicem binomiam extraximus; res in exemplo clarius patebit.

Sit ex numero 3 | 31 | 24 | extrahenda radix quadrata. Qui, cum in tres claſſes diſtinguatur, radicem habere trinomiam colligitur. Quæratur jam in claſſis ſiniſtimæ numero, nempe 3 quadratum maximum, quod cum ſit 1, & radix quadrata de 1 pariter ſit 1, erit 1 pars prima radicis trinomiæ; ſubtracto dein quadrato de 1, nempe 1 a 3, remanent 2, his adjungatur ſequentis claſſis numerus 3, eritque 23, in quo contineri debet duplum partis primæ, multiplicatum per ſecundam partem; dividatur ergo 23 per duplum de 1, id eſt 2, cujus quotus 8 erit ſecunda pars radicis trinomiæ; multiplicetur 2 per 8, & factum 16 ſubtrahatur a 23, relinquetur 7, cui adjungatur tertia cyphra numeri dati, nempe 1, ut fiat 71, ab hoc ſubtrahatur quadratum ſecundæ partis 8,

nem-

nempe 64, quo ſubtracto relinquetur 7, huic adjungatur quarta cyphra numeri dati, nempe 2, ut fiat 72, in hoc contineri debet tertia pars radicis trinomiæ. Quare ad hanc inveniendam, conſideretur radix binomia jam inventa, nempe 18, permodum unius partis radicis, & procedatur, ut in radice binomia extrahenda factum eſt; quare fiat duplum de 18, id eſt 36, per hunc dividatur 72, quotus 2 erit pars tertia radicis trinomiæ; multiplicetur jam 36 per 2, productum 72 ſubtrahatur a 72, quo ſubtracto nihil remanere deprehenditur; verum quia ex numero dato reſtat adhuc numerus 4, in quo contineri debet quadratum partis tertiæ, nempe de 2, quod eſt 4, & 4 ſubtractum a 4 nihil relinquit, erit radix trinomia 182 nunc inventa, vera ſimul dati numeri 33124.

SCHOLION.

Quod ſi ex ſubtractione ultima claſſis ultimæ reſiduum quidpiam fuerit, id erit indicio, numerum propoſitum, ex quo extrahenda erat radix quadrata, non eſſe perfecte quadratum; hinc nec radicem extractam e tali numero eſſe radicem adæquatam totius numeri propoſiti, ſed ſolum eſſe radicem adæquatam quadrati maximi, quod in tali numero continetur.

PROBLEMA II.

Extrahere radicem cubicam.

Fiat ex Binomia quantitate, e. g. $a+b$ primo quadratum, ſcilicet: $aa+2ab+bb$. Hoc quadratum multiplicetur iterum per ſuam radicem $a+b$, prodibit ergo cubus binomius: $aaa+3aab+3abb$

 $+bbb$

+*bbb*. Ubi notandum: primam partem *aaa* eſſe cubum quantitatis primæ *a*; partem ſecundam 3*aab* eſſe tria quadrata ejuſdem primæ quantitatis *a* multiplicata per ſecundam quantitatem *b*; tertiam partem 3*abb* eſſe tria quadrata quantitatis ſecundæ *b* multiplicata per primam *a*, quartam denique partem *bbb* eſſe cubum ſecundæ quantitatis *b*.

Ex his elementis, ſeu partibus deducitur methodus extrahendi radicem cubicam. Primo quidem radicem binomiam e cubo binomio, tum vero polynomiam, e quocunque cubo polynomio.

Sit igitur extrahenda radix cubica ex cubo binomio, e. g. *xxx* + 3*xxy* + 3*yyx* + *yyy*. Quæratur primo radix cubica primæ partis *xxx*, quæ reperitur eſſe *x*, ex hac fiat cubus *xxx*, qui ſubtractus ab *xxx*+3*xxy*+3*yyx*+*yyy* relinquit pro reſiduo 3*xxy* + 3*yyx*+*yyy*. Quoniam vero in hoc reſiduo continetur adhuc triplex quadratum de *x*, multiplicatum per *y*, hoc eſt: 3*xxy*, dein triplex quadratum de *y* multiplicatum per *x*, id eſt: 3*yyx*, ac cubus de *y*, ſeu *yyy*. Fiat ex radice jam inventa *x* triplex quadratum ſcilicet 3*xx*, per hoc dividatur reſidui prima pars, id eſt: 3*xxy*, quotus *y* erit ſecunda pars radicis cubicæ binomiæ; tum multiplicetur triplex quadratum 3*xx* per *y*, quod eſt 3*xxy*. fiat porro triplex quadratum de *y*, multiplicatum per *x*, hoc eſt: 3*yyx*, denique fiat cubus ex *y*, qui eſt *yyy*, quæ tria facta ſubtrahantur a reſiduo toto operationis primæ, ſcilicet: 3*xxy*+3*yyx*+*yyy*, cumque facta ſubtractione nihil remaneat, erit *x*+*y* radix cubica adæquata propoſiti cubi binomii: *xxx* +3*xxy* +3*yyx* +*yyy*. Demonſtratio hujus methodi eſt ipſa geneſis partium cubi; comprobatio autem inſtituitur, ſi ex radice reperta fiat cubus; unde

unde in noſtro exemplo ſi ex $x + y$ fiat cubus, erit is ipſus, ex quo extracta eſt radix prædicta.

Pari modo reperiuntur elementa, ſeu partes cubi trinomii, quadrinomii, &c. Si ex radice trinomia, quadrinomia, &c. cubus fiat. Hinc eadem etiam methodo radix cubica trinomia, quadrinomia, &c. extrahenda erit.

Applicatio methodi ad numeros.

IN cubis numericis eadem ſunt elementa, eædemque partes, quæ in literis, cum quilibet numerus in duos, aut plures numeros dividi poſſit. e.g. 32, idem eſt ac $30 + 2$. Sic 182, $= 100 + 80 + 2$, & ſic de aliis. Fiat igitur cubus ex radice 32. Dividatur primo in duos numeros $30 + 2 = a + b$, producetur ergo cubus binomius, cujus elementa, ſeu partes erunt ſequentes:

Radix binomia $a + b = 32 \quad = 30 + 2$

$$aaa = 3 . 3 . 3 = 30 . \; 30 . \; 30 = 27000.$$
$$3aab = 3 . 9 . 2 = 3 . 900 . \; 2 = 5400.$$
$$3abb = 3 . 3 . 4 = 3 . \; 30 . \; 4 = 360.$$
$$bbb = 2 . 2 . 2 = 2 . \; 2 . \; 2 = 8.$$

Cubus de $a + b =$ C. de $32 =$ C. de $30 + 2 = 32768$

Hinc patet eadem eſſe elementa, ſeu partes eaſdem cubi in numeris expreſſi, quas per literas ſuperius notavimus.

Obſervandum præterea cujusnam ſpeciei ſit radix extrahenda. Cum enim maximum monomium numericum ſit 9, cujus cubus eſt 729, ex tribus nempe cyphris conſtans; ſequitur, quod ſi datus cubus habeat plures quam tres cyphras, radix ejus erit major radice monomia. Cumque maximum binomium

ſit 99, cujus cubus ſex cyphras continet, ſequitur, quod ſi dato numero adſint plures quam ſex cyphræ, radix cubica ſit major binomia. Eodem modo cum maximum trinomium ſit 999, cujus cubus novem cyphras habet, ſi datus numerus ſit plurium, quam novem cyphrarum, radix ejus erit major trinomia.

Cognoſcitur autem ſpecies radicis cubicæ, ſi datus numerus dividatur in claſſes, cuilibet claſſi tres cyphras adſignando, & quidem diviſione claſſium a dextris ad ſiniſtram inchoata, hinc tot cyphris radix cubica conſtabit, quot claſſes numerus datus continet.

Sic in dato numero 7| 432 | 456 | quia tres ſunt claſſes, erit trinomia.

Et in numero 3|456|788| 100| 113 | quia quinque ſunt claſſes, erit quinquinomia.

Sit igitur numerus 32 | 768 | ex quo debet extrahi radix cubica.

Dividatur ergo in ſuas claſſes, quo facto, cum binæ tantum claſſes reperiantur, radix erit binomia.

Inchoetur extractio a claſſe ſiniſtima, quæ in propoſito numero eſt 32. Quæratur cubus maximus, qui in illo continetur; cumque is ſit 27, ſeu cubus de radice 3, erit hæc prima cyphra, ſeu pars radicis cubicæ binomiæ quæſitæ.

Subtracto dein cubo 27 a 32, remanent 5, cui ſi ex claſſe ultima adjungatur 7, erunt 57; tum per triplum quadratum primæ 3, nempe 27, dividantur 57, habebitur quotus 2, qui eſt ſecunda cyphra, ſeu pars ſecunda radicis quæſitæ; multiplicetur 27 per 2, factum 54 ſubtrahatur a 57, relinquetur 3, cui adjungatur numerus 6, eritque = 36; quoniam vero in hoc numero contineri adhuc debet factum ex triplo quadrato ſecundæ in primam, id eſt: 12 multiplicatum

per

per 3 = 36, ſubtrahatur hoc factum a 36, quo ſubtracto nihil remanet. Supereſt numerus 8, in quo cubum ſecundæ partis, ſcilicet de 2, contineri neceſſe eſt, qui cum ſit 8, ſubtracto vero 8 ab 8, reſiduum ſit = 0. erit 32 radix cubica adæquata numeri propoſiti : 32768.

Eadem methodo extrahetur trinomia, quadrinomia &c.

SCHOLION.

Si binomium elevetur ad quadrato quadratum, ſeu poteſtatem quartam, quintam, ſextam, &c. eadem facilitate reperiuntur earum elementa, eademque manet methodus extrahendi radices quartas, quintas, ſextas, &c.

Cum in cujuſcunque poteſtatis radicibus binomiis, trinomiis, &c. extrahendis, radicis pars ſecunda, tertia, &c. ſit quotus; in hoc autem reperiendo facillime per exceſſum erretur, ac proinde ea pars radicis quæſitæ vera major evadat; opus eſt ad hunc errorem detegendum, ut radix reperta ad tantam poteſtatem elevetur, quantæ poteſtatis erat numerus, ex quo talis radix extracta fuerat; ut in radicibus quadratis extrahendis monuimus. Quod ſi enim poteſtas radicis inventæ plures contineat cyphras, aut valor cypharum major fuerit valore poteſtatis datæ, id indicio erit, radicem inventam eſſe vera majorem; atque adeo extractio radicis denuo repetenda, parsque ſecunda, aut tertia, &c. radicis aliquo numero minuenda, idque toties iterandum, donec valor numeri poteſtatis datæ ſit vel æqualis, vel certe proxime major valore numeri, quem producit radix extracta ad eandem poteſtatem elevata.

Cum

Cum autem raro contingat, facta extractione, ut nihil reſidui maneat ex numero, verum plerumque aliquid ſuperſit, id indicabit, datum numerum non eſſe poteſtatem datam veram, ſeu perfectam; hinc nec radicem extractam eſſe radicem adæquatam totius numeri, ſed ſolum eſſe adæquatam poteſtatis perfectæ maximæ, quæ in dato numero continetur.

DE ANALYSI ARITHMETICA.

CAPUT IV.

Definitiones.

1. ANalyſis Arithmetica eſt Scientia reſolvendi omnia Problemata Arithmetica, per æquationem.

2. Æquatio dicitur comparatio duarum quantitatum æqualium, ut ſi ſit $a = b$. Quare omnis æquatio ex duabus partibus, ſive membris conſtat; parte una, quæ comparatur, & altera, cui comparatur.

3. Si elementa, ex quibus conſtat æquatio, ſint unius dimenſionis, æquatio dicitur ſimplex, ſi plurium dimenſionum, dicitur compoſita. Hinc ſecundum numerum dimenſionum diſtinguuntur etiam problemata.

Nunc de ſimplicibus agemus, de compoſitis ſuo loco acturi.

AXIOMATA.

1. SI duobus æqualibus æqualia addantur, manent æqualia.

2. Si ex duobus æqualibus ſubtrahantur æqualia, reſidua manent æqualia.

4. Si

3. Si duo æqualia multiplicentur per æqualia, facta ſunt æqualia.

4. Si duo æqualia dividantur per æqualia, quoti ſunt æquales.

5. Duorum æqualium poteſtates ſimiles ſunt æquales.

6. Duorum æqualium radices ſimiles ſunt æquales.

7. Quæ ſunt æqualia eidem tertio, æqualia ſunt ter ſe.

8. Si loco æqualis ſubſtituatur æquale, manet æquale.

REGULÆ GENERALES ANALYSIS.

1. QUantitates quæſitæ exprimantur ultimis alphabeti literis x, y, z. Quantitates cognitæ vel per numeros, vel per primas alphabeti literas a, b, c.

Quæritur e. g. ſumma aureorum Petri, &Pauli ſeorſim. Summa Pauli ponitur eſſe quadrupla ſummæ Petri, & præterea 7 aureorum. Summa vero utriusque ſimul ſumta eſt 32 aureorum.

2. Exprimatur Problema ſecundum conditiones, quibus proponitur. Vocetur ergo ſumma aureorum Petri x, erit ſumma Pauli $4x + 7$. Quare ſecundum conditionem Problematis $x + 4x + 7 = 32$.

3. Inveniendus igitur eſt valor literæ x; pro quo inveniendo nota: Omnes operationes eo tendere, ut litera ignota x ſola ex una parte æquationis compareat, ex altera vero parte termini omnes ſint noti; quod, ut fiat, termini ignoti ejusdem ſpeciei reducantur ad unum terminum, & ad eandem partem, ſi in utraque adſint. Sic in noſtro exemplo: $x + 4x + 7 = 32$. erit $= 5x + 7 = 32$.

4. Ter-

4. Termini incogniti ſeparentur a cognitis; & quidem ſi adſint per additionem, ſeparandi ſunt per ſubtractionem, & viciſſim: ut in noſtro exemplo: $5x + 7 = 32$, ſubtrahendo ab utraque parte 7, erit $5x = 25$.

5. Si terminis incognitis adſint cogniti per multiplicationem, ſeparandi ſunt per diviſionem, & viciſſim: ut in priore exemplo. Cum x ſit multiplicatum per 5, id eſt $5x = 25$, dividenda eſt utraque pars per 5, erit ergo $\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$, id eſt $x = 5$. Inventus igitur eſt valor ipſius x, qui nempe in noſtro exemplo eſt 5 aureorum. Unde juxta propoſitum Problema ſumma Petri eſſet 5 aureorum, ſumma Pauli utpote quadrupla Petri plus 7 aureis, eſſet 27 aureorum, amborum ſimul 32 aureorum.

6. Si quantitas ignota ſit elevata ad poteſtatem aliquam, ex utraque parte æquationis extrahenda eſt radix dictæ poteſtatis; ut ſi $xx = 4$, fiet $x = 2$.

Si quantitas ignota habeat præfixum ſignum $\surd$, elevetur utraque pars ad eam poteſtatem, quam denotat $\surd$. Sic ſi $\sqrt{x} = 2$, erit $x = 4$.

7. Si dentur plures literæ incognitæ, exterminandæ ſunt omnes, & ſi fieri poteſt, ad unam reducendæ, quod ſit per ſubſtitutionem.

Ita, ſi detur $x + y = 10$.

& $x = 4y$.

Subſtituendo in prima æquatione $4y$ loco x, habebitur $5y = 10$, & porro $y = 2$.

His quidem abſolvuntur regulæ generales Analyſis in reſolvendis Problematibus; uſus tamen earum peritiam quandam, & induſtriam requirit, quæ non niſi per iteratas Problematum reſolutiones acquiritur. Probe tamen notandum, quod, quidquid fiat ex una parte æquationis, id fieri debeat ex parte altera.

SEC-

SECTIO II.
DE RATIONE ET PROPORTIONE ARITHMETICA.

CAPUT I.

Definitiones.

CUm quantitatem aliquam cum altera comparamus, tum in genere dicimus nos conſiderare unius ad alteram relationem, aut rationem.

2. Hujusmodi autem relationes poſſunt eſſe variæ. At, ſi comparando duas quantitates, earum differentias præciſe conſideramus, tum dicitur comparatio arithmetica. Ut, ſi comparemus 3 cum 10, & conſideramus, quænam differentia inter 3 & 10 intercedat; tum dicimus nos conſiderare horum numerorum rationem arithmeticam.

3. Quare omnis ratio arithmetica duos terminos importat. Primus dicitur antecedens, alter conſequens.

4. Hinc oritur arithmetica proportio, quæ in duabus rationibus arithmeticis æqualibus poſita eſt. Exempli gratia: Quoniam inter 3, & 5 eadem differentia intercedit, quæ inter 17, & 19; inter hujuscemodi numeros dicitur dari arithmetica proportio; numeri vero dicuntur arithmetice proportionales. Un-

de

de quemadmodum ratio arithmetica importat duas quantitates, ita proportio arithmetica quatuor importare debet.

5. Si quatuor quantitatum arithmetice proportionalium quantitates ſingulæ ſint diverſæ, proportio dicitur diſcreta, ut ea, quæ intercedit inter 3, 5, 17, 19. At, ſi una bis ſumatur, proportio dicitur continua, ut inter 3, 5, 7.

6. Quantitates ejusdem ordinis vocantur homologæ; ſic 3, & 17 in allato exemplo ſunt homologæ inter ſe, quia ambæ ſunt antecedentes; pariter 5 & 19, quia ambæ ſunt conſequentes. Expreſſio literalis $a, b = c, d$ repræſentabit univerſaliter omnem proportionem arithmeticam. Igitur ſi differentia dicatur x, loco a poterit ſemper ſubſtitui $b + x$, ſi a fuerit majus, quam b; ſi vero a ſit minus, quam b, pro a ſubſtitui poterit $b - x$; eodem modo pro c ſubſtitui poteſt $d + x$, ſi c ſit majus, quam d; ſi vero c ſit minus, ſubſtituetur $b - x$. Quare
$b + x, b = d + x, d$. Aut: $b - x, b = d - x, d$.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

SI ſint quatuor quantitates arithmetice proportionales, ſumma extremarum æquatur ſummæ mediarum:

Sit $a, b = c, d$
Dico eſſe $a + d = b + c$
Subſtituantur enim termini, fiet $b + x, b = d + x, d$
Erit ſumma extremorum $b + d + x$
Summa mediorum $b + d + x$
Sint $3, 2 = 6, 5$
Summa extremorum 8
Summa mediorum 8

COROL-

COROLLARIUM

SI termini ſint in proportione continua arithmetica, ſumma extremorum eſt dupla medii.

Sint enim	$a, b = b, d$
Ergo	$a + d = 2b$
Sint	3, 4 = 4, 5
Summa extremorum	8
Duplum medii	8

PROBLEMA I.

DAtis tribus quantitatibus, invenire quartam arithmetice proportionalem. Sint tres numeri 3, 7, 9, ad quos inveniendus ſit quartus arithmetice proportionalis. Dicatur ille x

Erit ergo	$3, 7 = 9, x$
Quare	$3 + x = 16$
Et ſubtrahendo 3, fit	$x = 13$

Univerſaliter.

Sint datæ a, b, c; quarta quæſita x	
Ergo	$a, b = c, x$
Quare	$a + x = b + c$
Erit igitur	$x = b + c - a$

PROBLEMA II.

DAtis duabus quantitatibus, invenire tertiam continue arithmetice proportionalem.

Sint dati duo numeri 3, 5, tertius proportionalis x.

Erit ergo	$3, 5 = 5, x$
Quare	$3 + x = 10$
Et ſubtr. 3 erit	$x = 7$

Univerſaliter.

Sint datæ a, & b, tertia x
Ergo $a, b = b, x$
Quare $a + x = 2b$
Et ſubtr. a, erit $x = 2b - a$

PROBLEMA III.

Datis duabus quantitatibus, invenire mediam arithmetice proportionalem.

Sint dati 3, & 7; medius quæſitus x
Ergo $3, x = x, 7$
Quare $2x = 10$
Et dividendo per 2. $x = 5$

Univerſaliter.

Sint datæ quantitates a, b, quæſita x
Ergo $a, x = x, b$
Quare $2x = a + b$
Et divid. per 2. $x = \frac{a+b}{2}$

DE RATIONE, ET PROPORTIONE GEOMETRICA.

CAPUT II.

Definitiones.

1. Comparatio, vel reſpectus duarum quantitatum inter ſe quoad quotitatem, id eſt, quoties una quantitas in altera contineatur, vel quoties una alteram contineat, dicitur *Ratio Geometrica*. Exempli gratia: Si comparetur 12 cum 4, quoties ſcilicet 12 contineat 4; vel quoties 4 contineatur in 12. Hæc ratio geometrica, ſeu quotitatis, cum per diviſio-

ſionem unius quantitatis per alteram innoteſcat, eodem modo exprimitur, quo quantitates diviſas exprimere ſolemus; e. g. ratio 12 ad 4, bene exprimitur 12 : 4, vel $\frac{12}{4}$, & per expreſſionem generalem Algebraicam $a : b$, ſeu $\frac{a}{b}$. Omnis ergo ratio geometrica duos terminos importat, quorum primus, ſeu, qui dividitur, dicitur *Antecedens*; ſecundus, ſeu qui dividit, appellatur *Conſequens*.

2. Quotus ex hujusmodi diviſione ortus, dicitur: *Exponens rationis*, qui nonnunquam rationi ſuperſcribitur; ſic exponens rationis 12 : 4 qui eſt 3, hoc modo ſcribitur, $12 \overset{3}{:} 4$, per Algebram vero $a \overset{m}{:} b$.

3. Cum *Exponens* duarum quantitatum fuerit unitas, hoc eſt, ſi una quantitas toties, & eodem modo contineat alteram, quoties ab hac viciſſim continetur, inter eas dicitur dari ratio *Æqualitatis*; e. gr. $8 \overset{1}{:} 8$, aut $a \overset{1}{:} a$. Ratio vero *Inæqualitatis* inter duas quantitates eſſe dicitur, cum exponens vel eſt major, vel minor unitate, ut $4 \overset{2}{:} 2$, $2 \overset{\frac{2}{4}}{:} 4$, ſeu $2 \overset{\frac{1}{2}}{:} 4$. $a \overset{m}{:} b$, &c.

Ratio æqualitatis, utpote excludens omnem exceſſum, vel defectum, unica datur. Ratio autem inæqualitatis varia eſſe poteſt, pro varietate nempe exponentis, ſeu quoti, a quo etiam ſuam denominationem deſumit. Hinc ſufficit, ſi eas per exponentes indicemus, quin earum nominibus prope infinitis ſine neceſſitate memoriam oneremus. Placet tamen aliquot ſolius notitiæ cauſa recenſere, ſupponendo ſemper rationem majoritatis; id eſt, antecedens majus ſuo conſequente. Quare

4. Si antecedens contineat exacte ſuum conſequens aliquoties, ſeu ſi exponens ſit integer ſine fracto, Antecedens dicitur eſſe in ratione *Multiplicitatis*, vel multipla ad ſuum conſequens, & in ſpecie, *dupla*, *tripla*, &c. Si bis, ter, &c. contineat; ut $4 \overset{2}{:} 2$, $6 \overset{3}{:} 2$.

5. Si antecedens contineat conſequens ſemel, & præterea unam ejus aliquotam, dicitur ratio *ſuper particularis*; ſpeciatim ſi exponens ſit $1\frac{1}{2}$, ut $6 \overset{1\frac{1}{2}}{:} 4$, dicitur *ſeſquialtera*. Si $1\frac{1}{3}$, ut $8 \overset{1\frac{1}{3}}{:} 6$, *ſeſquitertia* &c.

6. Si antecedens contineat ſuum conſequens ſemel, & præterea plures ejus aliquotas, dicitur ratio *ſuperpartiens*. Speciatim ſi ſit exponens $1\frac{2}{3}$, ut : $5 \overset{1\frac{2}{3}}{:} 3$. *Superbipartiens tertias*; ſi exponens $1\frac{3}{4}$, ut : $7 \overset{1\frac{3}{4}}{:} 4$, dicitur *ſupertripartiens quartas*, &c.

7. Ex his fiunt aliæ compoſitæ, ut : *Multiplex ſuperparticularis*, *multiplex ſuperpartiens*, *&c.* e. gr. $13 \overset{2\frac{3}{5}}{:} 5$, dicitur *dupla ſupertripartiens quintas*; & ita de aliis.

Si vero ſit ratio minoritatis, id eſt, ſi antecedens ſit minus conſequente, ſeu exponens ſit fractus ſine integro, ut ſunt omnia exempla in definitione 4, 5, 6, 7 adducta, ſi ſcilicet in locum antecedentium ponantur conſequentia, manent eædem appellationes, verum præfixa particula *ſub*; ut ſi exemplum definitionis 4 invertatur, nempe $2 \overset{\frac{1}{2}}{:} 4$, dicetur *ſubmultiplex*, ſeu ſubdupla. Idem eſt de aliis.

8. Duæ

8. Duæ rationes Geometricæ dicuntur *Æquales*, *Eadem*, vel *Similes*, quæ habent eosdem exponentes; ſeu, quando unius rationis antecedens toties, & eodem modo continet ſuum conſequens, vel toties continetur in ſuo conſequente, quoties, & quo modo alterius rationis antecedens continet ſuum conſequens, vel continetur in ſuo conſequente. e. g. $8 \overset{2}{:} 4 = 12 \overset{2}{:} 6$, ſeu $a \overset{m}{:} b = c \overset{m}{:} d$.

9. Hæc æqualitas duarum rationum proprie dicitur *proportio* ſine addito; termini vero æqualium rationum dicuntur *proportionales*; nonnunquam tamen additur *Geometrice*, ad diſtinguendam proportionem Arithmeticam, quæ improprie proportio dicitur. Enunciatur autem proportio, e. g. $8 : 4 = 12 : 6$, hoc modo: octo ſunt ad quatuor, ſicut duodecim ſunt ad ſex; aut, octo habent eandem rationem ad quatuor, quam habent duodecim ad ſex. Hinc quemadmodum *ratio* duobus, ita *proportio* quatuor conſtare terminis debet.

10. Si termini ſinguli rationum æqualium ſint diverſi, proportio dicitur *Diſcreta*, e. gr. $8 : 4 = 12 : 6$; aut $a : b = c : d$. Si vero unus terminus bis ſumatur, ita, ut terminus, qui erat conſequens unius rationis, agat antecedens alterius rationis, proportio dicitur *Continua*, e. g. $8 : 4 = 4 : 2$, $a : b = b : c$; quæ etiam brevitatis gratia ſic exprimitur; $8 : 4 : 2$, aut, $a : b : c$ &c.

11. Termini *Homologi* ſunt antecedentes rationum, itemque conſequentes, ut ſi $a : b = c : d$, homologi erunt a & c; b, & d.

12. Duæ quantitates æquales multiplicatæ per eandem tertiam dicuntur *Æquemultiplices*, diviſæ vero per eandem tertiam *Æqueſubmultiplices*.

AXIOMATA.

1. DUæ rationes æquales habent exponentes æquales.

2. Duæ quantitates æquales dicunt eandem rationem ad unam tertiam.

3. Et, quæ dicunt eandem rationem ad unam tertiam, ſunt æquales.

4. Duarum quantitatum illa major eſt, quæ majorem dicit rationem ad eandem tertiam.

5. Duæ rationes habentes eandem rationem ad unam tertiam, dicunt quoque eandem rationem inter ſe.

6. Duarum rationum illa major dicitur, quæ majorem habet exponentem.

7. Si ſint quotcunque quantitates in una ſerie, e. g. a, b, c, & totidem aliæ in altera quadam ſerie, e. g. d, e, f, ita, ut quam rationem dicit a ad d, eandem quoque b ad e, & ſic procedendo; dicent quoque omnes unius ſeriei $a + b + c$, ad omnes alterius ſeriei $d + e + f$ eandem rationem, quam dicit prima ad primam, aut ſecunda ad ſecundam, &c.

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

SI quatuor termini ſint proportionales, exempli gratia $a : b = c : d$, erit factum extremorum æquale facto mediorum, hoc eſt, $a d = b c$.

Cum ſit $a : b = c : d$, adeoque (*) habeant exponentes æquales; vocentur illi indeterminate m, & ſuperſcripti rationibus, erunt $a \overset{m}{:} b = c \overset{m}{:} d$; ſupponamus jam propoſitas rationes eſſe rationes majoritatis, ſeu a eſſe multiplum de b per quotientem m, vel

(*) *Per definit.* 8 & 9, & *Axiom.* 1.

vel quod idem eſt, per exponentem indeterminatum m; ergo ob æqualitatem rationum, etiam c erit multiplum de d per exponentem m; igitur cum diviſor multiplicatus per quotientem ſit æqualis dividendo, in omni autem ratione geometrica antecedens ſit dividendus, conſequens diviſor, & exponens quotus (*) erit $a = mb$, & $c = md$; quare ſubſtitutis æqualibus pro æqualibus, erit $mb : b = md : d$; ſed horum factum extremorum $= mbd$.
Et factum mediorum $= mbd$, ergo.
In numeris id clare patet;

Nam ſit	$6 : 3 = 4 : 2$
Factum extremorum	$= 12$
Factum mediorum	$= 12$

Hac expreſſione Antecedentium, propoſitiones etiam difficillimæ Lib. 5. & 6. Euclid. mira facilitate demonſtrantur; ut ex ſequentibus patebit.

COROLLARIUM I.

QUare, ſi termini ſint in proportione continua, erit productum extremorum æquale quadrato medii.

Sit enim	$a : b = b : c$
Erit etiam	$ac = bb$
In numeris	$2 : 4 = 4 : 8$
Erit factum extremorum	$= 16$
Quadratum medii	$= 16$

COROLLARIUM II.

HOc Theorema fundamentum eſt regulæ *aureæ*, aut trium; inveniendi ſcilicet quartum, tertium, aut medium proportionalem.

 Sit

(*) *Per definit. 1. & 2.*

Sit igitur datis tribus a, b, c, inveniendus quartus proportionalis, qui, cum ſit ignotus, dicatur x.

Erit ergo	$a : b = c : x$
Quare (*)	$a\,x = b\,c$
Et dividendo utramque partem per a erit	$x = \frac{b\,c}{a}$
In numeris ſit	$2 : 4 = 3 : x$
Erit	$2\,x = 12$
Et dividendo per 2	$x = \frac{12}{2}$ id eſt 6.

Nimirum multiplicandi ſunt duo medii inter ſe, & productum dividendum per primum.

Eodem modo, ſi datis duabus quantitatibus inveniri debeat tertia proportionalis, per idem Theorema invenietur.

Sint enim datæ a, & b; quæſita tertia x.

Erit	$a : b = b : x$
Quare	$a\,x = b\,b$
Et divid. per a erit	$x = \frac{b\,b}{a}$
In numeris ſit	$2 : 4 = 4 : x$
Erit	$2x = 16$
Et dividendo per 2	$x = 8$

Quadrandum ergo ſecundum, & dividendum quadratum per primum.

COROLLARIUM III.

QUod ſi inter duas datas a, b inveniri debeat media proportionalis, fiat $a : x = x : b$, & erit

(*) *Per hoc Theorem.*

erit $a\,b = x\,x$, & $\sqrt[2]{a\,b} = x$. Quare ex producto $a\,b$ extrahenda erit quadrata radix.

Sit in numeris $2 : x = x : 8$
Erit $16 = xx$
Et $\sqrt[2]{16}$, id eſt $4 = x$

Notandum vero in numeris non poſſe ſemper reperiri exactum medium proportionalem, ſed ſolum tunc, quando factum duorum extremorum eſt numerus quadratus, ut in exemplo noſtro patet.

SCHOLION.

HÆc regula vocata eſt *aurea* àb antiquis propter ingentem ejus uſum tam in ſcientiis ſublimioribus, quam in omni vitæ civilis commercio.

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

SI ſint quatuor quantitates a, b, c, d, quarum productum extremarum $a\,d$ ſit æquale producto mediarum $b\,c$, dico, illas eſſe geometrice proportionales, hoc eſt, $a : b = c : d$.

Si neges, reperiatur ergo datis tribus a, b, c, quarta proportionalis x. (*)

Erit ergo	$a : b = c : x$
Quare	$a\,x = b\,c$
Sed ex hypotheſi	$a\,d = b\,c$
Ergo (**)	$a\,x = a\,d$

Et dividendo per a utramque partem, erit $x = d$. Sed $a : b = c : x$, ergo ſubſtituendo d loco x, erunt $a : b = c : d$, hoc eſt proportionales.

(*) *Per Corollar. 2. præcedens.*
(**) *Per Axioma 7. cap. 4. Sect. I.*

COROLLARIUM.

Datis ergo duobus factis æqualibus, factores ſemper reſolvi poterunt in proportionem reciprocam; id eſt, ſi $ad = bc$, tunc, ſi a factorem accipias pro primo antecedente, pro primo conſequente accipere debes factorem b alterius facti, nempe bc; pro ſecundo vero antecedente ex eodem facto bc factorem c, & pro conſequente hujus, factorem alterum d primi facti ad; quæ proportio ſervatis his conditionibus multis modis variari poteſt.

Sit enim $aabc = ddef$

Ergo $aa : dd = ef : bc$

Et $aab : dde = f : c$

Et $a : d = def : abc$

Et ita porro.

THEOREMA III.

Si ſint quatuor termini proportionales $a : b = c : d$ erit etiam *invertendo* $b : a = d : c$.

Fiat enim ſubſtitutio, & erit $mb : b = md : d$.

Ergo invertendo $b : mb = d : md$.

Productum extremorum $= bmd$.

Productum mediorum $= bmd$.

Sint $6 : 3 = 8 : 4$

Ergo invertendo $3 : 6 = 4 : 8$

THEOREMA IV.

Si ſint $a : b = c : d$

Erit etiam *alternando* $a : c = b : d$

Subſtituendo enim erit $mb : b = md : d$

Et alternando $mb : md = b : d$

Productum extremorum $= bmd$

Productum mediorum $= bmd$

Sint $6 : 3 = 8 : 4$

Erit alternando $6 : 8 = 3 : 4$

THEO-

THEOREMA V.

SI ſint $a : b = c : d$
Erit etiam *componendo* $a + b : b = c + d : d$
Facta enim ſubſtitutione erit

$$\overline{mb + b} : b = \overline{md + d} : d$$

Productum extremorum $= bmd + bd$
Productum mediorum $= bmd + bd$
Sint $6 : 3 = 8 : 4$
Ergo $6 + 3 : 3 = 8 + 4 : 4$
Seu $9 : 3 = 12 : 4$

THEOREMA VI.

SI ſint $a : b = c : d$
Erit etiam *ſubtrahendo* $a - b : b = c - d : d$
Facta enim ſubſtitutione

Erit $\overline{mb - b} : b = \overline{md - d} : d$
Productum extremorum $= bmd - bd$
Productum mediorum $= bmd - bd$
Sint $6 : 3 = 8 : 4$
Ergo $6 - 3 : 3 = 8 - 4 : 4$
Seu $3 : 3 = 4 : 4$

SCHOLION.

HÆc ſpecies ab Euclide, & aliis hunc ſectantibus dicitur fieri *dividendo*, cum tamen proprie fiat *ſubtrahendo*.

THEOREMA VII.

SI ſint $a : b = c : d$
Et $e : f = g : h$
Erunt etiam producta proportionalia; nempe
$ae : bf = cg : dh$
Nam in prima proportione per Theor. I. $ad = bc$
Et in ſecunda per idem Theorema $eh = fg$

Mul-

Multiplicando ergo æqualia per æqualia

adeb = *bcfg*

Quare per Corollarium II. Theorematis ſecundi

ae : *bf* = *cg* : *db*

Quod erat demonſtrandum.

Sint	6	:	3	=	4	: 2
Et alii	9	:	4	=	18	: 8
Ergo	54	:	12	=	72	: 16

Hæc ſpecies proportionis dicitur fieri *multiplicando.*

COROLLARIUM.

SI quatuor termini ſint proportionales, erunt quoque proportionalia eorum quadrata, cubi, & quæcunque poteſtates. Hæc enim producuntur ex multiplicatione radicum inter ſe.

Sic ſi ſint	6	:	3	=	4	:	2
Erunt quadrata	36	:	9	=	16	:	4
Et cubi	216	:	27	:	64	:	8

THEOREMA VIII.

SI quatuor termini proportionales dividantur per alios quatuor proportionales, quoti erunt proportionales.

Sit enim	*ae*	:	*bf*	=	*cg*	:	*db*
Et diviſores	*a*	:	*b*	=	*c*	:	*d*
Erunt quoti	*e*	:	*f*	=	*g*	:	*h*

Si enim non eſſent proportionales, illos multiplicando per terminos ſecundæ proportionis non facerent producta proportionalia, quod eſt contra hypotheſin.

Sint ergo	54	:	12	=	72	: 16
Et diviſores	9	:	4	=	18	: 8
Erunt quoti	6	:	3	=	4	: 2

Hæc ſpecies proportionis dicitur fieri *dividendo.*

COROL-

COROLLARIUM

SI ergo poteſtates quæcunque ſint proportionales, erunt quoque eorum radices ſimiles proportionales.

THEOREMA IX.

ÆQuemultiplices ſunt in eadem ratione ſimplicium.

Sint enim duæ quantitates a, & b, & multiplicentur ambæ per m, erit $ma : mb = a : b$

Productum extremarum $= abm$

Productum mediarum $= abm$

Sint duo numeri 6, 3, & multiplicentur ambo per quemcunque numerum, e. g. 4; erit $24 : 12 = 6 : 3$

THEOREMA X.

PArtes ſimiles ſunt in eadem ratione ſuorum totorum.

Sint quantitates a, & b, quæ dividantur per m.

Erit $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$

Productum extremarum $= \frac{ab}{m}$

Productum mediarum $= \frac{ab}{m}$

Sit 12 & 6, & ſumantur partes tertiæ, & erit $4 : 2 = 12 : 6$.

THEOREMA XI.

SInt quotcunque termini in una ſerie, & totidem alii quicunque in altera; verum ita, ut, quam rationem dicit primus ad ſecundum in una ſerie, eandem quoque dicat primus ad ſecundum in altera,

&

& quam ſecundus ad tertium in una, eandem ſecundus ad tertium in altera, & ita porro; dico, primus erit ad ultimum in una ſerie, ſicut primus eſt ad ultimum in altera.

Sint termini quotcunque $a, b, c.$
Et totidem alii $d, e, f.$

Si enim termini primi fuerint a, ma, mna, erunt quoque ſecundi d, md, mnd. per hypotheſ.

Quare $a : mna = d : mnd$
Productum extremorum $= amnd$
Productum mediorum $= amnd$
Sit ſeries prima 8, 4, 1, 3
Series ſecunda 16, 8, 2, 6
Ergo $8 : 3 = 16 : 6$

Hæc ſpecies proportionis dicitur *ex æquo ordinato.*

SCHOLION.

Solet quoque hæc proportio *ex æquo ordinato* alio etiam modo exprimi, quo communiter ab aliis proponitur, nempe: ſi fuerit $a : b = c : d$, & ſi fuerit, ut primum conſequens b ad alium aliquem terminum f, ita ſecundum conſequens d, ad alium g, in ratione quacunque; erit quoque $a : f = c : g$

Scribantur termini utriusque proportionis juxta propoſitas conditiones cum ſuis exponentibus, connectantur deinde lineis literæ æquales, quæ proportionem ex æquo ordinato non ingrediuntur; id eſt b & b; d & d; ut figura exhibet.

Erit ergo prima $a \overset{m}{:} b = c \overset{m}{:} d$
Et ſecunda $b \overset{n}{:} f = d \overset{n}{:} g$

De-

Demonſtrandum eſt $a : f = c : g$. Subſtituantur jam valores antecedentium.

Cum a in prima proportione ſit $= mb$, & b in ſecunda ſit $= nf$, erit $a = mnf$; eodem modo, cum c ſit $= md$, & d ſit $= ng$, erit $c = mng$. Quare loco a ſubſtituendo mnf, & loco c ſubſtituendo mng, erit $mnf : f = mng : g$

Productum extremorum		$=$	$mngf$.
Productum mediorum		$=$	$mngf$.
Sit prima	$4 : 2$	$=$	$6 : 3$
Et altera	$2 : 8$	$=$	$3 : 12$
Erit quoque	$4 : 8$	$=$	$6 : 12$

THEOREMA XII.

Sint quotcunque termini a, b, c in una ſerie, & totidem alii in altera d, e, f, hoc ordine perturbato: ut primus a ſit ad ſecundum b in prima ſerie, ſicut primus d eſt ad ſecundum e in altera, & ſicut b eſt ad c tertium in prima, ita f tertius ſit ad primum d in altera; erit, ut primus a ad tertium c in prima ſerie, ita tertius f ad ſecundum e in altera. Id eſt: $a : c = f : e$.

Sint termini ſeriei primæ	a, ma, mna.
Erunt termini ſecundæ juxta hypotheſim	nf, mnf, f.
Quare dico	$a : mna = f : mnf$.
Productum extremorum	$= mnaf$.
Productum mediorum	$= mnaf$.
Sint primi termini	2, 6, 12
Et alii per hypotheſ.	6, 18, 3,
Erit	$2 : 12 = 3 : 18$

Hæc ſpecies proportionis dicitur *ex æquo perturbato*.

SCHO-

SCHOLION.

QUemadmodum proportionem *ex æquo ordinato*, alii aliter exprimunt, ita quoque proportionem *ex æquo perturbato* ſub alia expreſſione proponunt; ſcilicet: ſi fuerit $a : b = c : d$, &, ut primum conſequens b eſt ad aliquem alium terminum f, ita alius aliquis terminus g ſit ad ſecundum antecedens c, erit etiam $a : f = g : d$.

Exprimantur hæ duæ proportiones ſecundum propoſitam hypotheſim cum ſuis exponentibus, & literæ æquales b, & b, c, & c, jungantur lineola; ut figura exhibet.

Prima proportio	$a : \overset{m}{b} = \overset{m}{c} : d$
Secunda	$b : \overset{n}{f} = \overset{n}{g} : c$

Demonſtrandum eſt; $a : f = g : d$. Subſtituantur valores antecedentium, ut in priore Scholio factum erat.

Itaque, cum b ſit $= nf$, & a ſit $= mb$, erit $a = mnf$, & cum $g = nc$, & $c = md$, erit $g = mnd$, ergo ſubſtitutis valoribus erit $mnf : f = mnd : d$.

Factum extremorum	$= mnfd$.
Factum mediorum	$= mnfd$.

Sint primi	8	:	4	=	12	:	6.
Et alii	4	:	16	=	3	:	12.
Erit	8	:	16	=	3	:	6.

THEOREMA XIII.

SI ſint quatuor termini proportionales $a : \overset{m}{b} = \overset{m}{c} : d$, erit etiam $a + c : b + d = a : b$.

Subſtituendo erit $mb+md : b+d = mb : b.$
Factum extremorum $= mbb + mbd$
Factum mediorum $= mbb + mbd.$
Sit $6 : 3 = 2 : 1$
Erit etiam $6+2 : 3+1 = 6 : 3$
Hoc eſt $8 : 4 = 6 : 3.$

THEOREMA XIV.

SI ſint duo ſubtracta quæcnnque in eadem ratione duorum totorum, a quibus ſubtrahuntur, etiam reſidua erunt, ut duo illa tota.

Sit $a : b = c : d.$
Erit $a - c : b - d = a : b.$
Et ſubſtituendo $mb - md : b - d = mb : b.$
Factum extremorum $= mbb - mdb.$
Factum mediorum $= mbb - mdb.$

SCHOLION.

HIs Theorematibus continetur doctrina proportionum, quæ habetur Lib. 5. Euclid. exceptis Theorematibus rationum *majoritatis*; quæ tamen habita notitia proprietatum rationis æqualitatis modo traditæ, facile determinantur; dicuntur autem rationes *majoritatis*, dum Antecedens primæ rationis ſuum Conſequens ſæpius continet, quam ſecundæ rationis Antecedens ſuum Conſequens; eæ hoc modo exprimuntur, e. g. $8 : 2 > 6 : 3.$

USUS REGULÆ AUREÆ SIMPLICIS, TAM DIRECTÆ, QUAM INVERSÆ.

REgulam auream, ſive trium, nihil eſſe aliud, quam Proportionem Geometricam, patet exCorol. II. Theorem. I. Cap. II. Quare terminos quoque, qui in proportionem hujusmodi ordinantur, debere eſſe homogeneos, id eſt, Antecedentes Antecedentibus, Conſequentes Conſequentibus; Hinc male quis quæreret pretium 8 ulnarum panni, ſi diceret:

2 urnæ vini veneunt 8 florenis, quanti 8 ulnæ panni, quia pannus & vinum non ſunt termini homogenei; poſſunt autem in proportionem ordinari etiam termini heterogenei, ſed reducibiles ad homogeneos, quos proinde ante operationem reducere oportet. Modus vero reducendi tradetur Cap. VI. In doctrina fractionum, ad quas pertinent.

Regula hæc aurea in duas communiter ſpecies ab Arithmeticis dividitur in *Directam* & *Inverſam*. Directa dicitur, quando termini ordinate eandem rationem inter ſe habent, hoc eſt, quanto majus, vel minus eſt Antecedens primæ rationis Antecedente ſecundæ, tanto majus vel minus ſit Conſequens rationis primæ Conſequente ſecundæ. Hinc vi hujus regulæ, ad reperiendum quartum terminum, ſecundus, & tertius terminus multiplicandi ſunt inter ſe, productum dividendum per terminum primum, quotus erit quartus quæſitus.

Inverſa dicitur: quando, quanto majus, vel minus eſt Antecedens primæ rationis Antecedente ſecundæ, tanto reciproce conſequens ſecundæ rationis debet eſſe majus, vel minus, conſequente primæ. Hinc plerique Arithmetici, dum regula inverſa occurrit, jubent multiplicare primum, & ſecundum terminum inter ſe, productum dividere per tertium; verum cum *inverſa* in *directam* mutari poſſit, hæc quoque methodus reperiendi quartum quæſitum in methodum regulæ directæ tranſit. Sint enim quatuor quantitates inverſe proportionales, ſcilicet a, b, c, x, ſeu $a : c = x : b$, erit *invertendo* $c : a = b : x$, in qua reperitur $x = \frac{ab}{c}$, hoc eſt productum ſecundi & tertii diviſum per primum; quæ eſt methodus reperiendi quartum ipſius regulæ aureæ directæ.

Qua-

Quare dato caſu regulæ inverſæ, nulla alia re opus eſt, quam, ut terminus datorum tertius ponatur primo loco, terminus huic homogeneus ſecundo, homogeneus autem quarto quæſito x tertium locum obtineat; quibus ita diſpoſitis regula aurea directa utendum erit.

EXEMPLUM I.

SPatio 3. menſium expenduntur in centum operarios floreni 4000, quæritur, quot floreni expendentur in eosdem operarios ſpatio 6. menſium?

Quoniam, quantum augetur numerus menſium, tantum augeri debent floreni expendendi, caſus propoſitus reſolvendus erit per regulam auream directam; quare, ſi quartus terminus dicatur x.

menſ. menſ. flor. flor.

Erit ut $3 : 6 = 4000 : x$

Igitur factum extremorum æquale facto mediorum per Theor. I.

Erit $3x = 4000 . 6$, hoc eſt 24000.

Et dividendo utramque partem per 3

Erit $x = \frac{24000}{3} = 8000.$

Quotus igitur 8000. eſt numerus florenorum 6 menſium ſpatio expendendorum in operarios centum.

In praxi ſecundus & tertius terminus inter ſe multiplicantur, productum dividitur per primum, quotus eſt quartus quæſitus, ut in exemplo:

ulnæ panni		flor.	ulnæ ejusdem panni?
2	veneunt	12,	quanti 7

Multiplicetur 12

Per 7 — 7

Productum 84

Dividatur per 2 — 2̶2̶ | 42. numerus florenorum pro ulnis 7. ejusdem panni.

84

EXEMPLUM REGULÆ INVERSÆ.

AD extruendum ædificium intra 8 menſes requiruntur operarii 100, quot operarii requirentur ad idem ædificium extruendum intra menſes 16?

In hac quæſtione obſervo, quod ſi longiore tempore extrui debeat ædificium, non tot operarii requirantur, quam ſi breviore abſolvi deberet; adeoque quantum creſcit tempus, tantum numerus operariorum decreſcere debet; erit ergo numerus operariorum in ratione inverſa temporum; hoc eſt, ut 16 menſes ſunt ad 8 menſes, ita 100. operarii ad quartum x.

	menſ.		menſ.		operar.		operar.
conſequenter	16	:	8	=	100	:	x
Erit	$16x$	=	100 . 8	=	800		

Et dividendo per 16 erit $x = \frac{800}{16} = 50$ numerus operariorum pro 16 menſibus requiſitorum.

Eadem methodo reſolvuntur alia hujusmodi problemata.

Applicatio Regulæ aureæ ſimplicis ad problemata ſocietatum.

PRoblemata ſocietatum dicuntur illa, dum e. gr. tres mercatores componunt certam ſummam pecuniæ ad faciendum lucrum, elapſo autem certo tempore, quærunt dividere inter ſe lucrum factum, pro ratione ſcilicet pecuniæ a ſingulis collatæ.

Obſervandum autem proportionem hanc hoc modo eſſe inſtituendam: ut ſumma omnium eſt ad datum ſingulorum, ita lucrum totale eſt ad lucrum ſingulorum. Hinc patet toties hanc proportionem repetendam eſſe, quot fuerint data ſingulorum. In exemplo:

Tres

Tres mercatores, Petrus, Paulus, & Joannes compoſuerunt ſummam 100. florenorum. Petrus dedit 24, Paulus 30, Joannes 46. Intervallo unius anni hac pecunia lucrati ſunt 200. florenos; quærirur, quantum lucrum ſinguli fecerint? Quare cum tres compoſuerint hanc ſummam, ter quoque proportio inſtituenda erit, ut in ſubjecto ſchemate apparet.

Pro lucro	Sũma omnium		datũ ſing.		lucrũ totale.	
Petri	100	:	24	=	200 : x.	lucr. Petri.
Pauli	100	:	30	=	200 : y.	lucr. Pauli.
Joann.	100	:	46	=	200 : z.	lucr. Joann.

Quod ſi hoc modo ſingularum proportionum duo termini medii inter ſe multiplicentur, & productum dividatur per primum, habebitur lucrum ſingulorum, ſcilicet:

Lucrum Petri	=	48.
Lucrum Pauli	=	60.
Lucrum Joañis	=	92.
Summa omnium	=	200, quæ eſt æqualis lucro totali omnium.

DE PROPORTIONE HARMONICA, ET CONTRAHARMONICA.

CAPUT III.

Definitiones.

1. Quatuor quantitates dicuntur harmonice proportionales, cum differentia inter primam, & ſecundam eſt ad differentiam inter tertiam & quartam, ut quantitas prima ad quartam. Hujusmodi ſunt numeri 6, 8, 12, 18. Nam differentia primi a ſecun-

 do,

do, ſcilicet 2, eſt ad differentiam tertii a quarto, nempe 6, ut primus 6 ad quartum 18.

2. Si omnes termini ſint diverſi, harmonica proportio dicitur *Diſcreta*. Si vero ſecundus bis ſumatur, dicitur *Continua*. Tales ſunt numeri 15, 5, 3.

3. Si vero differentia primi & ſecundi eſt ad differentiam tertii & quarti, ut quartus ad primum, hujusmodi proportio dicitur *Contraharmonica*. Tales ſunt 3, 11, 2, 6.

PROBLEMA I.

DAtis tribus quantitatibus invenire quartam harmonice proportionalem. Sint dati numeri 6, 8, 12, & harmonice quartus quæſitus x

Erit ergo (*) $\overline{6 - 8} : \overline{12 - x} = 6 : x$

Quare factum extremorum
æquale facto mediorum
$6x - 8x = 72 - 6x$

Et addendo utrique $+ 6x$

Erit $12x - 8x = 72$

Seu $4x = 72$

Et divid. per 4 erit $x = 18$.

Univerſaliter.

Sint datæ tres quantitates a, b, c, & quarta quæſita x

Ergo $\overline{a - b} : \overline{c - x} = a : x$

Quare $ax - bx = ac - ax$

Et add. $+ax$, erit $2ax - bx = ac$.

Divid. per $2a - b$, erit $x = \frac{ac}{2a - b}$.

PRO-

(*) *Definit. 1. huj.*

PROBLEMA II.

DAtis duabus quantitatibus invenire tertiam continue harmonice proportionalem. Sint dati duo numeri 24, 12, & quæſitus x

Ergo (*) $\overline{24 - 12} : \overline{12 - x} = 24 : x$
Quare $24\,x - 12\,x = 288 - 24\,x$
Addendo $+ 24\,x$, erit $36\,x = 238$
Unde erit $x = \frac{288.}{36} = 8$

Univerſaliter.

Sint duæ quantitates a, b quæſita x

Ergo $\overline{a - b} : \overline{b - x} = a : x$
Ergo $a\,x - b\,x = a\,b - a\,x$
Et $2\,a\,x - b\,x = a\,b$
Ergo divid. per $2\,a - b$ erit $x = \frac{a\,b}{2\,a - b}$

PROBLEMA III.

DAtis duabus quantitatibus 24, 8, invenire mediam harmonicam x

Ergo (**) $\overline{24 - x} : \overline{x - 8} = 24 : 8$
Et $192 - 8\,x = 24\,x - 192$
Et add. $+ 192$, erit $384 - 8\,x = 24\,x$
Porro addendo $+ 8\,x$, erit $384 = 32\,x$
Et divid. per 32, erit $\frac{384}{32} = x$, hoc eſt $x = 12$.

(*) *Per definit. 2.*
(**) *Per eand. definit.*

Univerſaliter.

Sint datæ a, b, quæſita x

Ergo $a - x : x - b = a : b$

Quare $ab - bx = ax - ab$

Et add. $+ ab$, erit $2ab - bx = ax$

Et porro add. $+ bx$, erit $2ab = ax + bx$.

Divid. per $a + b$, erit $\frac{2ab}{a+b} = x$.

SCHOLION.

AD reperiendum quartam contraharmonice proportionalem opus eſt æquatione quadratica, quæ ſuo loco explicabitur.

DE PROPORTIONE COMPOSITA, DUPLICATA, TRIPLICATA, &c.

CAPUT IV.

Definitiones.

EXperientia & ratione certum eſt, quantitates ſecundum plures rationes creſcere, aut decreſcere poſſe. Sic enim vis motrix poteſt, imo debet augeri, vel minui, tam ſecundum rationem molis movendæ, quam ſecundum rationem velocitatis majoris, aut minoris imprimendæ. E. g. Si unus gradus virium movet molem libræ unius velocitate, ut unum, ad movendam molem duarum librarum manente eadem velocitate requiruntur duo gradus virium; at, ſi velocitas quoque ſit augenda, e. g. ut ſit tripla prioris, requirentur jam ſex gradus virium, hoc

hoc eſt, vires duorum graduum multiplicandæ ſunt per vires trium graduum propter triplam velocitatem moli duarum librarum imprimendam. Eodem modo quantitas, quæ eſt quadrupla reſpectu unius, & ſimul quintupla reſpectu alterius quantitatis, reſpectu ambarum erit vigecupla.

Atque hinc eſt, quod ad determinandam rationem duarum quantitatum creſcentium, vel decreſcentium, ſumi debeant producta duarum, vel plurium rationum, ſecundum quas dictæ quantitates creſcunt, quæ producta producuntur ex Antecedentibus in Antecedentes, & ex Conſequentibus in Conſequentes. Hinc ſi quantitas quædam, e. g. Q. pendeat a pluribus quantitatibus A, B, C, & altera quædam *q* itidem a pluribus *a*, *b*, *c*, erit

Ratio Q : *q* = A B C : *abc*, hoc eſt, Q eſt ad *q* in ratione compoſita A B C : *abc*.

1. Comparatio igitur facti Antecedentium cum facto conſequentium ſecundum quotitatem, dicitur ratio *Compoſita*. *Componentes* vero dicuntur rationes, ex quibus orta eſt ratio compoſita; e. g. ratio *compoſita* eſt *a c* : *b d*, cujus *componentes* ſunt rationes *a* : *b* & *c* : *d*.

2. Ratio compoſita ex duabus rationibus æqualibus dicitur *duplicata*, ſeu *quadratica*; compoſita ex tribus æqualibus dicitur *triplicata*, ſeu *cubica*, ex quatuor *biquadratica*, & ita porro. Sic, ſi ſint duæ rationes æquales *a* : *b*, & *a* : *b*, harum compoſita *a a* : *b b* eſt duplicata rationis unius *a* : *b*; ſic quoque compoſita *a a a* : *b b b* ex tribus æqualibus *a* : *b*, *a* : *b*, & *a* : *b* eſt triplicata rationis *a* : *b*. *Componentes* harum rationum dicuntur *ſubduplicatæ*, *ſubtriplicatæ*, aut radices quadratæ, cubicæ &c.

Notandum vero ad rationem duplicatam, triplicatam, &c. non requiri æqualitatem terminorum, ſed ſolum æqualitatem rationum, hoc eſt exponentium, per Axioma I. Cap. II. Hinc ratio compoſita $ac : fg$, ex rationibus æqualibus $a \overset{m}{:} f$, & $c \overset{m}{:} g$ etiam eſt duplicata primæ $a \overset{m}{:} f$, hoc eſt $aa : ff$, quia utriusque $ac : fg$, & alterius $aa : ff$, idem eſt exponens mm, ut mox demonſtrabitur.

THEOREMA I.

EXponens rationis compoſitæ, eſt factum omnium exponentium, illarum rationum, quæ rationem compoſitam conſtituunt. Sit ratio quædam $a \overset{m}{:} b$, & alia $c \overset{n}{:} d$, dico exponentem rationis compoſitæ $ac : bd$ eſſe mn factum exponentium.

Nam ſubſtituendo, erit ratio prima $mb : b$, & altera $nd : d$, ratio vero compoſita erit $mnbd : bd$, ſed hujus exponens eſt mn, utpote quotus ortus ex diviſione antecedentis per conſequens, ergo.

Sint rationes componentes $4 \overset{2}{:} 2$, & $8 \overset{4}{:} 2$, erit compoſitæ rationis $32 : 4$, exponens 8, hoc eſt factum exponentium 2 per 4.

COROLLARIUM.

QUare exponens rationis duplicatæ eſt quadratum exponentis rationis ſimplæ; ſic exponens de $aa : bb$ eſt mm, ſi nempe exponens rationis ſimplæ $a \overset{m}{:} b$ dicatur m.

Exponens rationis triplicatæ, eſt cubus exponentis rationis ſimplæ; eodem modo exponens rationis quadruplicatæ, erit biquadratum rationis ſimplæ, & ſic de aliis.

THEOREMA II.

IN ratione compoſita Antecedens primæ rationis componentis, eſt ad conſequens rationis componentis ultimæ, in ratione compoſita omnium rationum intermediarum. Sit ratio compoſita $abc : bcd$, cujus rationes componentes ſunt $a \overset{m}{:} b$, $b \overset{n}{:} c$, $c \overset{o}{:} d$, dico a primam eſſe ad d ultimam in ratione compoſita harum trium rationum; hoc eſt: exponentem de $a : d$ fore factum exponentium mno. Nam

Subſtituendo erit $c = od$, & quoniam $b = nc$, erit $b = nod$. Porro $a = mb$, ſed $b = nod$, ergo $a = mnod$, erit ergo $mnod : d$, cujus exponens mno factum exponentium rationum omnium intermediarum, id eſt, ratio $mnod : d$ eſt compoſita ex omnibus intermediis.

Sint componentes $16 \overset{2}{:} 8$

$8 \overset{2}{:} 4$

$4 \overset{2}{:} 2$

Erit primus 16 ad 2 ultimum in ratione compoſita omnium intermediarum, $16 . 8 . 4 : 8 . 4 . 2$., id eſt $512 : 64$, nam utriusque exponens eſt factum exponentium 2. 2. 2. ſeu 8.

THEOREMA III.

SInt quotcunque quantitates continue Geometrice proportionales, erit prima ad tertiam in ratione duplicata, ſeu quadratica primæ ad ſecundam; pri-

prima ad quartam in ratione triplicata, ſeu cubica primæ ad ſecundam, & ita porro

Sint quantitates continue Geometrice proportionales $a : b : c : d : f : g$, quorum loco ſubſtitui poſſunt (*) ſequentes:

$$a : b : \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa} : \frac{bbbb}{aaa} : \frac{bbbbb}{aaaa} \text{ \&c.}$$

Quare prima ad tertiam erit, ut $a : \frac{bb}{a}$, ſeu multiplicando utramque per a, ut $aa : bb$; hoc eſt in ratione duplicata primæ $a : b$ ſecundam.

Prima ad quartam, ut, $a : \frac{bbb}{aa}$, hoc eſt multiplicando per aa, ut, $aaa : bbb$: hoc eſt in ratione triplicata, ſeu cubica primæ $a : b$ ſecundam.

Eodem modo oſtenditur, de prima ad quintam, de prima ad ſextam, &c.

COROLLARIUM.

QUare ratio primæ ad tertiam, erit eadem, quæ eſt quadrati primæ ad quadratum ſecundæ, ſeu quod idem eſt, exponens primæ ad tertiam erit quadratum exponentis primæ ad ſecundam; ratio primæ ad quartam erit eadem, quæ cubi primæ ad cubum ſecundæ, &c.

SCHOLION.

IDem in numeris verùm eſſe patet; enimvero cum exempla proportionalium numerorum continue Geometrice decreſcentium prolixa ſint, accreſcentium vero exponens ſit fractus, de quibus primum agetur, nullum hic loci apponere placuit; ſunt autem Accreſcentes e. g. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

De-

(*) *Per Corol. I. Theor. II. Cap. II. Sect. II.*

Decreſcentes $64 \overset{2}{:} 32 \overset{2}{:} 16 \overset{2}{:} 8 \overset{2}{:} 4 \overset{2}{:} 2$ &c. per quos numeros pro literis ſubſtitutos eodem modò certitudo Theorematis patebit.

APPLICATIO REGULÆ AUREÆ AD PROBLEMATA COMPOSITA.

PRæter ea, quæ de regula aurea ſimplice tam directa, quam inverſa dicta ſunt, de compoſita ſequentia ſunt notanda:

1. Regulam auream *Compoſitam* eam vocari, qua, datis quinque, ſeptem, aut pluribus terminis, repetiendus eſt ſextus, octavus, &c. Dicitur autem compoſita propterea, quod terminus quæſitus dependeat a pluribus rationibus, quæ ad tres ſolum reducuntur terminos, antequam regula aurea inſtituitur.

2. Reductio hæc terminorum fit eo prorſus modo, quo ratio compoſita, quam paullo ante explicuimus, ſcilicet: ſi regula aurea compoſita ſit directa, multiplicentur inter ſe datarum rationum antecedentes, & eodem modo conſequentes, uno excepto termino, illo nempe, cui homogeneus eſt terminus, qui quæritur. In exemplo id clarius patebit.

Sit datum exemplum quinque terminorum, in quo per regulam auream compoſitam *directam* quærendus eſt ſextus x. e. gr. Mercatores 2 florenis 20. intra unius anni tempus lucrantur 60. florenos; quot lucrantur florenos intra idem tempus Mercatores 8. florenis 80.? ſcribantur ergo termini eo ordine, quem figura exhibet.

Mercatores	2 }	
florenis	20 }	
lucrantur	60	flor.
Mercatores	8 }	
florenis	80 }	
quot lucr. - - -	x?	

Cum

Cum tertio termino, nempe lucro 60. flor. homogeneus ſit ſextus quæſitus *x*; tertius ergo non ingreditur reductionem, qui propterea *ſolitarie poſitus* dicitur. Quare cum lucrum 60. flor. ſit ad lucrum quæſitum *x*, ſicut directe Mercatores 2 ſunt ad Mercatores 8, & ſimul ut 20 flor. ad 80 flor. erit ergo lucrum 60. flor. ad lucrum quæſitum *x*, in ratione compoſita 2 : 8, & 20 : 80, hoc eſt, ut factum antecedentium 2 . 20 : 8 . 80, factum conſequentium; id eſt, ut 40 : 640. Igitur in proportionem coordinando terminos, erit; ut 40 : 640 = 60 flor. : *x*. Apparet adeo terminos quinque ad tres ſolum reductos eſſe. Eodem prorſus modo reducuntur ad tres, termini 7 aut plures.

3. Unde pro caſu omni regulæ aureæ compoſitæ, ſed directæ, quod bene notandum, habetur modus univerſalis reducendi terminos quotcunque. 1.) Terminus quæſito *x* homogeneus, ſeu ſolitarie poſitus, nunquam ingreditur reductionem, & ſemper facta jam aliorum terminorum reductione, tertium locum obtinet in reſolutione Problematis. 2.) Termini ſpectantes ad ſolitarie poſitum inter ſe multiplicantur, & productum primo loco ponitur. 3.) Termini ad quæſitum *x* pertinentes pariter inter ſe multiplicantur, horumque factum ſecundum locum obtinet, quarto loco quæſitus *x* locatur.

Quæ circa regulam compoſitam inverſam notanda ſunt, paullo inferius indicabuntur; nunc quædam Problemata regulæ directæ compoſitæ reſolvemus.

PROBLEMA I.

AD effodiendos 2. palmos terræ, cujus reſiſtentia eſt, ut 3, requiruntur vires, ut 4.

Ad

Ad effodiendos 3. palmos terræ, cujus reſiſtentia eſt ut 4, quantæ requiruntur vires?

Animadverto primo: vires eſſe in ratione directa palmorum, & præterea in ratione directa reſiſtentiarum. Quare erunt in ratione compoſita tam palmorum, quam reſiſtentiarum, nempe ut eorum producta.

Palmi 2, Reſiſtentia 3; Productum primum 6.
Palmi 3, Reſiſtentia 4; Productum ſecundum 12.

Ergo ut productum primum ad productum ſecundum, ita vires primæ ad vires quæſitas. Quare ſi vires quæſitæ dicantur x

Erit $6 : 12 = 4 : x$

Et porro multiplicando 12 per 4, & factum 48 dividendo per 6, habebitur quotus $8 = x$, id eſt, quartus quæſitus.

PROBLEMA II.

Ad alendos 20 homines annis 2 expenduntur 1000 flor. Ad alendos 30 homines annis 6, quot expendentur?

Obſervo, quod 1000 flor., qui expenduntur, ſint ad expendendos flor. x, tam in ratione directa hominum, quam in ratione directa annorum, hoc eſt, in ratione compoſita ambarum rationum, adeoque ut eorum producta. Quare

Homines 20, Anni 2, Productum primum 40
Homines 30, Anni 6, Productum ſecund. 180

Igitur in proportionem coordinando terminos

Erit, ut $40 : 180 = 1000 : x$

Et multiplicando 180 per 1000, factum 180000 dividendo per 40, prodibit quotus $4500 = x$ quæſito.

PRO-

PROBLEMA III.

Mercatores 6, aureis 100, menſibus 2, lucrantur aureos 70; Mercatores 12, aureis 400, menſibus 4, quot lucrantur aureos?

Adverto primo: terminum 70 aureor. eſſe homogeneum quæſito x; ſecundo: rationem horum 70 aureorum ad quæſitum x, eſſe in ratione directa tam Mercatorum 6 ad 12, quam aureorum 100 ad 400, & ſimul in ratione directa menſium 2 ad 4, hoc eſt, in ratione compoſita harum trium rationum, ſeu ut producta horum terminorum. Quare

Mercatores 6, Aurei 100, Menſes 2, productum primum 1200.

Mercatores 12, Aurei 400, Menſes 4, productum ſecundum 19200.

Igitur, ut $1200 : 19200 = 70 : x$.

Et multiplicando 19200 per 70, factum 1344000, dividendo per 1200, prodibit quotus $1120 = x$, quod eſt quæſitum lucrum.

Hinc liquet, terminos 7 ad 3 ſolum reductos eſſe; pari igitur modo quotcunque termini dentur, poterunt ad 3 reduci; verum, quod bene notandum, hanc methodum reducendi valere ſolum pro regula compoſita directa.

Nam pro *inverſa compoſita*, præter ea, quæ de directa nunc dicta ſunt, nota: quod, ſi terminus quæſito x homogeneus ſit in ratione compoſita *inverſa* alicujus rationis componentis, pro reductione terminorum nulla alia re opus ſit, quam ut termini talis rationis componentis invertantur, hoc eſt, pro antecedente ponatur conſequens, & pro conſequente antecedens. His ita inverſis eodem modo reductio inſtituitur, quo in directa facta eſt. Idem eſt notan-

notandum, ſi plures rationes inverſæ componentes ingrediantur reductionem.

SCHOLION.

Ab hoc Problemate pendent omnes quæſtiones compoſitæ ſocietatum.

PROBLEMA IV.

Ad effodiendos 20 palmos tempore 3 dierum requiruntur operarii 10.

Ad effodiendos 12 palmos tempore 6 dierum, quot operarii?

Quoniam operarii ſunt in ratione directa palmorum, & in ratione inverſa temporum, ſeu dierum; ponatur directe ratio palmorum, ſed inverſe ratio temporum, & erit ratio operariorum in ratione horum productorum.

Palmi 20 dies 6 Productum 120

Palmi 12 dies 3 Productum 36

Quare ſi operariorum quæſitus numerus dicatur x, erit $120 : 36 = 10 : x$

Et multiplicando 36 per 10, factum 360 dividendo per 120, invenitur numerus operariorum, ſeu $x = 3$.

PROBLEMA V.

Sit jam reſolvenda regula aurea compoſita ſocietatis. E. gr. Tres Mercatores lucrati ſunt ſimul 1000. flor.

Primus contulit	10 flor.	pro menſibus	19.
Secundus	13 -	pro menſibus	10.
Tertius	30 -	pro menſibus	7.

Quæritur, quantum ſit lucrum ſingulorum?

 Ad-

Adverto lucra ſingulorum eſſe in ratione tam datorum, quam temporum; id eſt, in ratione compoſita datorum, & temporum ſingulorum Mercatorum. Multiplicandum igitur eſt ſingulorum datum per ſuum tempus; factum iſtud erit datum compoſitum ſingulorum. Porro facta compoſita ſingulorum addantur, ut habeatur Summa omnium factorum compoſitorum. His rite factis, dicatur: ut Summa omnium factorum compoſitorum eſt ad lucrum totale, ita datum compoſitum cujusvis eſt ad ſuum lucrum; & cum data ſingulorum ſint tria, ter quoque hæc proportio inſtituenda.

Eſt igitur datum compoſitum primi	10 . 19 = 190.
Datum compoſitum ſecundi	13 . 10 = 130.
Datum compoſitum tertii	30 . 6 = 180.
Summa omnium factorum compoſitorum	= 500.

Fiat ergo pro lucro primi, ut	500 : 1000 = 190 : x.
Et pro lucro ſecundi, ut	500 : 1000 = 130 : y.
Porro pro lucro tertii, ut	500 : 1000 = 180 : z.

Quodſi harum trium proportionum ſingilatim terminos medios multiplices inter ſe, & factum dividas per primum, prodibit:

Pro primo lucrum	$x =$	380. flor.
Pro ſecundo lucrum	$y =$	260.
Pro tertio lucrum	$z =$	360.

Summa omnium $x + y + z =$ 1000. flor. quod cum ſit æquale lucro totali dato, recte colligitur, datum lucrum pro ratione ſingulorum rite fuiſſe inventum.

SCHOLION.

AD comprobandum, utrum rite operatus ſis, omnes quoti inventi, & ſibi additi, efficere debent Sum-

Summam æqualem lucro totali dato ; ſecus ſi accidat, operatio repetenda erit. Obſervandum autem plerumque quotis per hanc regulam inventis adhærere numeros fractos ; qui qua ratione ſibi addendi, & ad integros reducendi ſint, ut operationem comprobare poſſis, mox dicetur. Cæterum ab hoc Problemate pendent omnia Problemata compoſita Societatum.

PROBLEMA VI.

Cum regula aurea compoſita tam directa, quam inverſa, ut ex prioribus certum eſt, ex pluribus rationibus componatur, liquet, quamlibet compoſitam terminorum quinque per duas, & in genere, ſi pluribus conſtet terminis, per plures iteratas regulas aureas ſimplices ſolvi poſſe. E. g. Sit reſolvendum Problema terminorum quinque per duas regulas ſimplices : 300 floren. intra 2 annos dant uſuram 36 flor. ; quantam dabunt 600 flor. intra annos 12 ?

Primo : quæratur uſura 600 flor. pro annis 2. ? dicendo : 300 flor. dant 36, quantum 600 ? *ſubintelligendo utrobique per annos duos.* Multiplicatis igitur 600 per 36, & facto 21600, diviſo per 300, prodibit quotus, ſeu uſura ex 600 flor. pro annis duobus, 72 florenorum.

Hac uſura reperta, inferatur ſecundo : ut 2 anni ſunt ad 12 annos, ita uſura 72 flor. eſt ad quartum quæſitum x, hoc eſt, ut $2 : 12 = 72 : x$.

Quare multiplicatis 72 per 12, & facto 864 diviſo per 2 prodibit quotus 432 pro uſura 600 flor. per annos 12.

Eadem uſura 432 flor. per reductionem hactenus traditam, & facilius, & multo compendioſius habetur. Scilicet ſi multiplicentur 300 flor. per ſuos 2

 annos,

annos, & 600 pariter per ſuos 12, habebitur proportio terminorum quinque ad tres reducta. Hinc

	flor.		flor.		uſura		uſuram.
erit ut	600	:	7200	=	36	:	x

Et multiplicatis 7200 flor. per 36, & facto 259200 diviſo per 600, prodibit quotus $x = 432$, qui idem eſt cum priore per duas operationes reperto.

SCHOLION.

Hinc, licet quælibet regula aurea plurium, quam trium terminorum per plures quoque operationes ſolvi poſſit; reductio tamen ad tres terminos prioribus ſolutionibus præferenda eſt, ob moleſtum calculum fractionum, qui per reductionem hactenus explicatam evitatur.

DE ALGORITHMO FRACTIONUM.

CAPUT V.

Definitiones.

1. Fractio proprie talis eſt quantitas unitate minor. Hinc, talis quantitas, quæ neque per unitatem, aut per ullum numerum integrum exprimi poteſt, optime exprimitur per rationem, ſive reſpectum ad unitatem. Patet id ex ſubjecto exemplo. Sit e. g. linea *AB*, & alia quædam minor *CD*.

A |——|——|——*B*; *C* |——|——| *D*

Quare, ſi linea *AB* aſſumatur pro unitate, erit linea *CD* minor hac unitate; igitur, ut quantitatem lineæ *CD* indicare, aut exprimere poſſim, comparo hanc cum linea *AB*, & ex hac comparatione obſervo, quod, ſi linea *AB* dividatur e. g. in 3 partes æqua-

æquales, linea *CD* duas præciſe tales partes contineat; hinc dico, lineam *CD* eſſe talem quantitatem, quæ ſe habet ad unitatem linearem *AB*, ſicut 2 partes lineæ *AB* ſe habent ad lineam *AB*, hoc eſt, ad 3 ejus partes; exprimitur adeo linea *CD* per rationem 2 : 3, aut quod uſitatius $\frac{2}{3}$, & per Algebram $a : b$, ſeu $\frac{a}{b}$.

Quodſi jam linea *AB* ſupponatur diviſa in 4 partes, & altera quædam linea minor 3 tales partes contineat; linea hæc minor ſe habebit ad unitatem *AB*, ut 3 : 4, ſeu $\frac{3}{4}$.

2. Antecedens hujusmodi rationis dicitur *Numerator*, Conſequens *Denominator*; ſic in hac ratione, ſeu fractione $\frac{2}{3}$, Antecedens 2 eſt numerator, Conſequens 3 denominator; pariter in hac $\frac{3}{4}$ numerator eſt 3, denominator 4.

3. Denominator in omni fractione repræſentat totum, ſeu unitatem in tot partes diviſam, quot denominator indicat; numerator vero denotat, quot tales partes minori quantitati competant; ſic in hac fractione $\frac{2}{3}$, denominator 3 indicat unitatem in 3 partes diviſam, numerator 2 denotat quantitati datæ duas ex his partes competere.

Ex quibus ſequitur, duas quantitates unitate minores eſſe æquales, ſi ad unitatem eandem rationem dicant; ſic ſint duæ fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{6}$; quoniam 2 : 3 ſicut 4 : 6, erunt hæ fractiones æquales.

4. Fractiones *Spuriæ*, aut *Impropriæ* vocantur illæ, quarum numeratores aut ſunt æquales, aut majores ſuis denominatoribus, ut ſunt $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{2}$. $\frac{am}{m}$ &c.

5. Fra-

5. Fractiones, quæ habent eosdem denominatores, dicuntur *ejusdem denominationis* aut *homogeneæ*, ut $\frac{10}{15}$, & $\frac{12}{15}$, aut $\frac{ad}{bd}$, & $\frac{bc}{bd}$.

PROBLEMA I. FUNDAMENTALE.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

1. Sint duæ fractiones $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ ad eandem denominationem reducendæ. Primo: Multiplica ambos terminos fractionis primæ per denominatorem 5 fractionis ſecundæ; dein ambos quoque terminos fractionis ſecundæ per denominatorem primæ, nempe per 3.

Erunt hæ æquales his novis $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$, $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3}$, ſeu $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, nec immutabitur eorum valor; cum enim rationes æquimultiplices ſint in eadem ratione ſimplicium, (*) eædem erunt rationes numeratoris ad denominatorem fractionum reductarum, quæ erant ſimplicium, ac proinde quantitates non mutabuntur.

2. Si ſint tres, ut $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ reducantur primo duæ, e.g. primæ, erunt eæ reductæ $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}$, $\frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 4}$ hoc eſt $\frac{15}{20}$ $\frac{16}{20}$; quarum ambæ porro reducantur cum tertia; multiplicando nempe ambarum terminum utrumque per denominatorem tertiæ, & terminos tertiæ per priorem denominatorem reductum; erunt-

(*) *Per Theor. 9. Cap. 2. Sect. 2.*

eruntque reductæ $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7}$, $\frac{4 \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7}$, $\frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 7}$

ſeu, $\frac{105}{140}$, $\frac{112}{140}$, $\frac{100}{140}$.

3. In genere, ſi plures duabus ſint reducendæ, productum omnium denominatorum inter ſe, erit denominator communis; Numerator autem ſingularum multiplicatus per denominatores aliarum, erit quæſitus numerator.

Eadem eſt reductio fractionum literalium, e. g. Sint reducendæ duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ erunt reductæ *per Num.* I. $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$; & univerſaliter ſi ſint fractiones quotcunque $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{o}{s}$, erunt multiplicando

$$\frac{adfns;\ bcfns;\ bdens;\ bdfms;\ bdfno}{bdfns}$$

PROBLEMA II.

Fractiones addere.

Reducantur primo ad eandem denominationem; ſecundo: addantur numeratores.

Tertio: Sumæ numeratorum ſubſcribatur denominator comunis; nova hæc fractio erit Suma quæſita.

Sint addendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{5}$

Reductæ fiunt $\frac{15}{20}$ & $\frac{12}{20}$

quarum Summa eſt $\frac{27}{20}$

Additio fractionum literalium fit jungendo illas ſigno + ut ſi ſint addendæ $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$

Summa erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Poſſunt tamen etiam reduci ad eandem denominationem. Sic priores reductæ fient $\frac{ad}{bd}$; $\frac{bc}{bd}$; quarum ſumma eſt $\frac{ad + bc}{bd}$

PROBLEMA III.

Fractiones a fractionibus ſubtrahere.

Reducantur ad eandem denominationem, dein ſubtrahatur numerator a numeratore; reſiduo ſubſcribatur denominator communis, eritque fractio hæc differentia, ſeu reſiduum deſideratum.

Sit fractio $\frac{3}{4}$, ex qua ſubtrahenda ſit $\frac{2}{5}$. Reductæ fiunt $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$. Erit ergo earum differentia $\frac{7}{20}$.

Si fractiones ſint literales, exprimatur ſubtractio per ſignum —. Ita ſit fractio $\frac{a}{b}$, ex qua ſit ſubtrahenda $\frac{c}{d}$; ſcribatur $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

Poſſunt tamen etiam ad eandem denominationem reduci, ut ſubtrahi poſſit numerator a numeratore, veluti in numeris.

PRO-

PROBLEMA IV.

Fractiones multiplicare.

UT Analytice inveſtigetur methodus multiplicationis, ſit $\frac{a}{b} = P$ & $\frac{c}{d} = Q$

Quoniam vero ex natura fractionis: ut denominator ad numeratorem, ita eſt unitas ad fractionem; habebuntur hæ duæ proportiones.

$$b : a = 1 : P$$
$$d : c = 1 : Q$$

Quare multiplicando (*) erit $b\,d : a\,c = 1 : PQ$.
Ergo (**) $b\,d\,PQ = a\,c$
Et conſequenter dividendo utramque partem per $b\,d$, erit $PQ = \frac{a\,c}{b\,d}$

Ex qua formula deducitur methodus hæc generalis: Numeratores datarum fractionum multiplicentur inter ſe, item denominatores; fractio horum productorum erit productum quæſitum.

Sit multiplicanda fractio $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$, erit productum quæſitum $\frac{6}{20}$.

Sint plures ex. gr. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, erit productum $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 7}$ ſeu $\frac{30}{84}$.

Univerſaliter.

SInt inter ſe multiplicandæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, $\frac{m}{n}$, erit harum omnium productum $= \frac{a\,c\,e\,g\,m}{b\,d\,f\,h\,n}$

(*) *Per Theorem. 7. cap. 2. Sect. 2.*
(**) *Per Theorem. 1. cap. 2. Sect. 2.*

PROBLEMA V.

Fractiones dividere.

INveſtigetur eodem modo per Analyſim methodus diviſionis. Sit igitur, ut in priore Problemate $\frac{a}{b} = P$ & $\frac{c}{d} = Q$, ſitque $\frac{a}{b}$ dividendum per $\frac{c}{d}$ erit ergo $\frac{a}{b}$ diviſum per $\frac{c}{d} = P$ diviſum Q, ſeu

Exprimendo per ſigna erit $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{P}{Q}$

Et multiplic. per $\frac{c}{d}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{Pc}{Qd}$

Seu aliter exprimendo $a : b = Pc : Qd$

Quare (*) $Pbc = Qda$

Et reſolvendo in proportionem (**) $P : Q = ad : bc$

Hoc eſt exprimendo per fractos $\frac{P}{Q} = \frac{ad}{bc}$;

Multiplicandus ergo numerator primæ fractionis per denominatorem ſecundæ; & denominator primæ per numeratorem ſecundæ, fractio ex iſtis productis orta, erit quotus quæſitus.

Sit fractio $\frac{3}{4}$ dividenda per $\frac{2}{5}$ multiplicetur 3 per 5, & 4 per 2, erit quotus $\frac{15}{8}$

Sit ſecundo $\frac{3}{7}$ dividenda per $\frac{5}{9}$, habebitur eodem modo quotus $\frac{27}{35}$. In praxi: fractionis, per quam fit diviſio numeri invertantur, & fiat multiplicatio per præcedens Probl.

PRO-

(*) *Per Theor. I. Cap. II. Sect. II.*
(**) *Per Corol. Theor II. Cap. II. Sect. II.*

PROBLEMA VI.

Fractionem datam ad quamcunque poteſtatem evehere.

SIt fractio data $\frac{a}{b}$ elevanda ad quadratum. Cum quadratum vocetur illud productum, quod fit ex multiplicatione quantitatis per ſe ipſam. (*) Si fractio data $\frac{a}{b}$ multiplicetur per ſe ipſam, habebitur (**) productum $\frac{aa}{bb}$, id eſt, ejus quadratum. Hoc quadratum ſi porro multiplicetur per $\frac{a}{b}$, productum hujus erit cubus $\frac{aaa}{bbb}$. Hoc ſi iterum multiplicetur per $\frac{a}{b}$, erit productum hujus $\frac{aaaa}{bbbb}$ biquadratum, & ſic procedendo haberi poterit poteſtas quæcunque.

Unde methodus generalis fractionem ad poteſtatem quamcunque elevandi in eo ſita eſt; ut tam numerator, quam denominator elevetur ad datam poteſtatem.

Sic ſi elevanda ſit ad quadratum fractio $\frac{3}{4}$, erit illud $\frac{9}{16}$; ſi ad cubum, erit is $\frac{27}{64}$; & eodem modo elevabitur ad quamcunque poteſtatem.

PROBLEMA VII.

Ex fractione data radicem datam extrahere.

QUemadmodum fractio elevatur ad poteſtatem quamcunque per elevationem tam numeratoris,

(*) *Per Sect. 1. cap. 3.*
(**) *Per Problema 4. huj.*

ris, quam denominatoris, ita quoque radix datæ poteſtatis tam ex numeratore, qnam denominatore extrahenda erit.

Sic ſi ex fractione $\frac{aa}{bb}$ ſit extrahenda radix quadrata erit illa $\frac{a}{b}$.

Sic ex $\frac{aaa}{bbb}$ radix cubica erit $\frac{a}{b}$;

Eodem modo habentur illæ in numeris; ſic radix quadrata de $\frac{4}{9}$ reperietur $\frac{2}{3}$,

Radix cubica de $\frac{8}{64}$, erit $\frac{2}{4}$, & ſic de aliis.

PROBLEMA VIII.

Quantitatem datam ad fractionem datæ denominationis reducere.

Sit quantitas a reducenda ad fractionem, cujus denominator ſit m.

Multiplicetur a per m, & producto am ſubſcribatur datus denominator m, ut habeatur $\frac{am}{m}$, erit a reductum ad denominatorem datum m. Patet autem ex ipſis literis fractionem $\frac{am}{m}$ eſſe æqualem a, adeoque valorem non immutari.

Hac methodo totum quodlibet reduci poteſt ad partes quaslibet. Sic ſi e. g. 4. pedes reducendi ſint ad pollices; quoniam pollex eſt pars duodecima pedis; 4 pedes reducentur ad pollices, ſi multiplicentur per 12, hoc eſt, ſi reducantur ad denominationem datam 12. Erunt igitur 4 pedes reducti æquales fractioni huic $\frac{4 \cdot 12}{12}$, ſeu $\frac{48}{12}$, id eſt 48 pollicibus.

Per

Per idem Problema quantitates heterogeneæ reducibiles tam inter ſe comparari, quam ſibi addi, ſubtrahi, &c. poſſunt, modo prius reducantur ad denominationem ſpeciei illius, cum qua comparandæ ſunt. Sic libras reducendo ad uncias, comparamus cum unciis, uncias cum drachmis, &c. ſic quoque gradus cum minutis graduum, &c. valores pecuniæ ex. gr. florenos cum groſſis, &c.

PROBLEMA IX.

Fractionem ſpuriam ad integrum reducere.

QUoniam in fractione ſpuria numerator major denominatore; dividatur numerator per denominatorem, quotus ex hac diviſione ortus erit integer, aut integer cum fractione vera.

Sit fractio ſpuria $\frac{30}{10}$ reducenda ad integrum; quare diviſo numeratore 30 per 10, quotus 3 erit integer, qui petebatur.

Eodem modo $\frac{30}{5} = 6$; $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{15}{5} = 3$; $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Et in genere $\frac{am}{m} = a$; $\frac{ab}{a} = b$; $\frac{abcd}{cd} = ab$.

SCHOLION.

HAc methodo partes, ad quas in priore Scholio totum aliquod reductum eſt, itidem reducuntur ad totum. Sic 48 pollices reducuntur ad pedes ſi per 12 dividantur, eritque quotus 4 numerus pedum quæſitorum. Idem eſt de aliis partibus ſuperius memoratis.

PROBLEMA X.

Determinare rationem, quam habent fractiones inter ſe.

CUm ratio duarum quantitatum haberi non poſſit, niſi eæ ſint homogeneæ; fractiones, quarum ratio quæritur, reducendæ ſunt ad eandem denominationem, ſic enim illæ fient homogeneæ. (*)

Quare ratio duarum fractionum habentium eosdem denominatores, erit eadem, quæ eſt numeratoris unius, ad numeratorem alterius.

Quæratur ratio fractionis $\frac{3}{4}$ ad $\frac{2}{5}$, erunt hæ reductæ per Proble. 1. $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$ quare dico rationem fractionum $\frac{15}{20}$ ad $\frac{8}{20}$ eſſe eandem, quæ eſt numeratorum 15 ad 8. Nam in proportionem coordinando erunt:

$$\frac{15}{20} : \frac{8}{20} = 15 : 8$$

Erit productum extremorum $= \frac{15 \cdot 8}{20} = \frac{120}{20}$

Productnm mediorum $= \frac{15 \cdot 8}{20} = \frac{120}{20}$ ergo.

Id quoque patet in literis. Quæratur enim ratio de $\frac{a}{b}$ ad $\frac{c}{d}$, erunt hæ reductæ $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. Et ratio harum reductarum erit eadem, quæ $ad : bc$; quia pariter in proportionem ponendo terminos $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$ $= ad : bc$

Factum extremorum $= \frac{adbc}{bd}$

Factum mediorum $= \frac{adbc}{bd}$, ergo.

PRO-

(*) *Per definit. 5. huj. Cap.*

PROBLEMA XI.

Transmutare fractionem ex data denominatione in aliam.

SIt fractio $\frac{3}{4}$ transmutanda in fractionem aliam, ejusdem tamen valoris cum priore, cujus denominator ſit 12. Quare numerator, qui quæritur, dicatur x, & cum valor fractionis novæ idem eſſe debeat, erit $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$, & ſolvendo in proportionem erunt $4 : 3 = 12 : x$.

Quare multiplicatis 12 per 3, & facto 36 diviſo per 4, quotus 9 erit $= x$, hoc eſt quæſitus numerator; fractio igitur $\frac{9}{12}$, & reducta habetur ad denominationem 12, & valor prorſus idem, qui eſt fractionis $\frac{3}{4}$.

SCHOLION.

HUjus Problematis uſus maximus eſſe ſolet in determinandis valoribus fractionum, quarum denominatores repræſentant totum in certas partes diviſum, quæ in uſu non ſunt.

Sint enim e. g. $\frac{2}{3}$ pedis; quoniam pars tertia pedis non eſt menſura pedis uſitata, $\frac{2}{3}$ pedis reducendæ erunt ad pollices, ſeu partes duodecimas, quæ ſunt uſitatæ; quare dico per Problema modo dictum, ut $3 : 2 = 12 : x$, & reperietur $x = 8$, hoc eſt, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ pedis, nempe 8 pollicibus, qui ſunt partes pedis uſitatæ. Eodem modo procedendum erit cum aliis fractionibus non uſitatis quibuscunque, reducendo illas ad uſitatas.

LEM-

LEMMA.

Datis duobus numeris invenire maximam eorum menſuram.

NUmerus datorum major dividatur per minorem, & nulla habita ratione quoti, minor porro dividatur per reſiduum operationis primæ, hoc primum reſiduum iterum dividatur per reſiduum ſecundum, reſiduum ſecundum per tertium, & ſic porro, donec reſiduum ſit = 0; reſiduum ergo ultimum erit menſura communis maxima datorum duorum numerorum.

Sint dati numeri 280, & 130, quorum quæratur maxima communis menſura.

Numerus major	280
Numerus minor	130
Reſiduum primum	20
Reſiduum ſecundum	10
Reſiduum tertium	0
Maxima communis menſura	10

PROBLEMA XII.

Fractionem datam ad minimos terminos reducere.

SIt fractio $\frac{130}{280}$ reducenda ad minimos terminos.

Quæratur maxima communis menſura numerorum 130, 280, quæ per lemma præcedens reperitur eſſe numerus 10. Diviſo ergo utroque per 10. fiet fractio $\frac{13}{28}$, quæ, & ad minimos eſt reducta terminos, & cum priore $\frac{130}{280}$ ejusdem eſt valoris;

quia

quia dividendo tam Antecedens, quam Conſequens per eundem numerum, ut hic factum eſt, ratio manet eadem. (*)

Eodem modo fractiones literales ad terminos minimos reducuntur. Sic ſi ſit fractio $\frac{aabbc}{aabbd}$.

Dividantur ambo termini per $aabb$; & habebitur fractio prior in terminis minimis, nempe $\frac{c}{d}$

Sit $\frac{aa - bb}{a + b}$ reducenda; dividantur termini per $a + b$, & fiet $\frac{a - b}{1}$

SCHOLION.

Algorithmus fractionum modo recenſitus applicari facile poterit ad Algorithmum numerorum integrorum cum fractis, modo numero integro ſubſcribatur unitas; quo facto, habebitur fractio ſpuria, quæ eo prorſus modo tractatur, quo fractio *proprie* talis tractari ſolet. Sit enim e. g. fractio $\frac{3}{4}$ multiplicanda per numerum integrum 2, fiat ex 2 fractio hæc ſpuria $\frac{2}{1}$, tum fiat multiplicatio $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{1}$ ut in Problemate IV., eodem modo fiat diviſio per Probl. V. Quod ſi vero numero integro 2 ſit addenda fractio $\frac{3}{4}$, aut ab hoc ſubtrahenda; fractio ſpuria $\frac{2}{1}$ ad eandem denominationem per Probl. I. erit reducenda, tum vero ad reductam addenda erit per Problema II., aut ab hac ſubtrahenda per Problema III.

(*) *Per Theor.* X. *Cap. II. Sect. II.*

PROBLEMA XIII.

De fractionibus fractionum.

QUemadmodum fractio eſt quantitas unitate minor , ſeu pars unitatis , ita fractio fractionis eſt pars fractionis.

Sit linea A B aſſumta pro unitate.

D C
A |—|—|—|———|———|———| B

Concipiatur illa primo diviſa in 4 partes , cnjus una pars ſit AC ; erit AC $\frac{1}{4}$ totius lineæ AB ; conſideretur porro ipſa minor linea AC diviſa in 3 partes æquales , quarum una ſit AD ; erit ergo AD $\frac{1}{3}$ de AC , hoc eſt , $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, ſeu AD erit *fractio fractionis* AC.

Quare, quemadmodum fractio ſimplex exprimitur per rationem ad unitatem, ita fractio fractionis exprimitur per rationem ad fractionem , cujus eſt fractio.

PROBLEMA UNICUM, ET FUNDAMENTALE.

Reducere fractiones fractionum ad fractiones ſimplices.

SIt fractio $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ reducenda ad fractionem ſimplicem. Dico hanc obtineri , ſi numerator hujus multiplicetur per numeratorem alterius, itemque denominator per denominatorem , fractio inde conſurgens erit fractio ſimplex quæſita.

Erit ergo $\frac{1}{3}$ multiplicata per $\frac{1}{4}$ æqualis $\frac{1}{12}$, hoc eſt, una tertia de una quarta eſt reſpectu unitatis una duodecima.

Demonſtratio hujus Problematis deſumitur a natura , ſeu definitione harum fractionum ; nam fractio

ctio fractionis exprimitur per rationem ad fractionem, hoc eſt, ut denominator ad numeratorem, ita fractio altera, cujus illa eſt fractio ſe habet ad fractionem fractionis. Quare ſi $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ vocetur Q.

Erit $3 : 1 = \frac{1}{4} : Q$

Et multiplic. $3\,Q = \frac{1}{4}$

Quare dividendo utramque partem per 3 erit

$Q = \frac{1}{4 \cdot 3}$ ſeu $Q = \frac{1}{12}$, hoc eſt $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Eadem methodo reducuntur fractiones literales. Sic $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ erit $= \frac{ac}{bd}$

COROLLARIUM.

Ut igitur fractiones fractionum addi, ſubtrahi &c. poſſint, reducendæ ſunt prius ad fractiones ſimplices.

SCHOLION.

Eadem quoque methodo addi, ſubtrahi &c. poſſunt fractiones fractionum fractionum &c. modo per hoc Problema reducantur ad ſimplices.

DE ALGORITHMO FRACTIONUM DECIMALIUM.

CAPUT VI.

Definitiones.

Sit unitas quæcunque linearis diviſa in decem partes æquales, ſitque linea AB una decima pars illius unitatis.

D C
A |—|—|—|—|—|—|—|—|—|—| B

 Con-

Concipiatur porro linea AB in decem diviſa partes, quarum una ſit AC; AC linea denuo concipiatur diviſa in decem partes, quarum una ſit AD; & ita porro dividendo ſemper in partes decem; erit AB una decima totius unitatis; linea AC una decima partis decimæ, ſeu una centeſima totius unitatis; linea AD erit una decima lineæ AC, hoc eſt, una milleſima totius unitatis, & ſic procedendo habebitur ſeries quædam fractionum, quarum denominatores creſcunt in ratione geometrica decimali continua, nempe:

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, &c.

Hujuſmodi fractiones dicuntur *fractiones decimales*. Et in ſpecie partes decimæ vocantur etiam *Primæ*, centeſimæ *Secundæ*, milleſimæ *Tertiæ*, & ſic porro.

Uſus vero harum fractionum, qui in omni Matheſeos parte eſt ampliſſimus, in eo ſitus eſt, nempe: ut menſuræ, pondera, &c. quibus in dimetiendis lineis, planis, ſolidis, & his ſimilibus utimur. E. gr. Pes, aut libra primo quidem in partes decem, dein pars decima item in decem, & ſic porro dividantur, quemadmodum lineam AB paullo ante concepimus diviſam. Hoc modo diviſis menſuris ſi utamur, operationes non modo a moleſto aliarum fractionum calculo liberas præſtamus, cum fractiones decimales methodo numerorum integrorum tractentur, verum etiam errorem omnem ſenſibilem evitamus. Dicuntur autem tales menſuræ aut pondera, *Menſuræ Geometricæ.* Sic pertica decem pedum longa dicitur decempeda, pes in decem iterum partes diviſus, dicitur pes Geometricus &c.

PROBLEMA I.

Numeros integros ad fractiones decimales reducere.

Multiplicetur numerus integer per denominatorem fractionis decimalis datum.

Sit numerus 5 reducendus ad primas,

Erit is $= \frac{5 \cdot 10}{10} = \frac{50}{10}$

Sit ad ſecundas $= \frac{5 \cdot 100}{100} = \frac{500}{100}$

Sit ad tertias $= \frac{5 \cdot 1000}{1000} = \frac{5000}{1000}$

Cum vero Regiomontano (*) hæc expreſſio fractionum decimalium minus commoda viſa ſit, aliam huic ſubſtituit, qua, omiſſo denominatore, tot numeratori datæ fractionis ſuperponendæ ſunt virgulæ, ſeu lineæ, quot in denominatore ſcribendi fuiſſent zeri. Sic loco $\frac{3}{10}$, omiſſo denominatore ſcribatur $3'$, loco $\frac{4}{100}$, $4''$, & ita porro, ut figura exhibet.

4 Unitates $= 4^{0}$
$\frac{4}{10}$ Seu Primæ $= 4'$
$\frac{4}{100}$ Seu Secundæ $= 4''$
$\frac{4}{1000}$ Seu Tertiæ $= 4'''$
$\frac{4}{10000}$ Seu Quartæ $= 4''''$, & ita porro. Vocantur autem hæ lineæ *Exponentes* fractionum decimalium.

Hujus expreſſionis ope facillime habetur reductio tam numerorum integrorum ad fractiones deci-

 males

(*) *Præclarum Inventum fractionum decimalium plerique cum Voſſio adſcribunt Mullero Regiomontano, circa Annum 1464. Primus tamen haſce & perfecit, & expoſuit Simon Stevinus A. 1685.*

males quasvis, quam ipſarum fractionum decimalium inter ſe.

Cum enim per primum reducendi modum, e. g. 3° unitates reductæ ad ſecundas, ſeu centeſimas, ſint $\frac{3 \cdot 100}{100}$, ſeu $\frac{300}{100}$; erunt hæ per modo dictam methodum æquales $300''$. Sic quoque $5'$ reductæ ad ſecundas, erunt $50''$; & ſic de aliis.

Hinc unitates reducuntur ad primas, ſeu decimas, ſi unitatibus addatur zerus o, & novo huic numero ſuperponatur una linea.

Si unitates ſint reducendæ ad centeſimas, ſeu ſecundas, addantur duo zeri, itemque lineæ duæ ſuperſcribantur.

Si unitates ad milleſimas, ſeu tertias, addantur tres zeri, pariterque tribus lineis ſignentur. Et ita porro.

Ita 3 unitates reductæ ad primas $= 30'$
3 unitates reductæ ad ſecundas $= 300''$
3 unitates reductæ ad tertias $= 3000'''$
3 unitates reductæ ad quartas $= 30000''''$ &c.

Eodem modo partes decimæ, ſeu primæ reducuntur ad alias;

Sic $3'$ primæ reductæ ad ſecundas $= 30''$
3 primæ reductæ ad tertias $= 300'''$
3 primæ reductæ ad quartas $= 3000''''$ &c.

Sic quoque $3''$ ſecundæ reductæ ad tertias $= 30'''$
3 ſecundæ reductæ ad quartas $= 300.''''$

Quare ſi ex. gr. $3^{\circ} + 5' + 7''$ reducendæ ſint ad unum terminum, habebitur per hanc methodum $3^{\circ} = 300''$; $5' = 50''$; conſequenter $300'' + 50'' + 7'' = 357.''$

PRO-

Sic quoque $5^{\circ} + 7' + 4'''$, reductæ erunt $5704'''$,

Eodem modo $6^{\circ} + 7' + 4''$, reductæ ad tertias, erunt $6740'''$

PROBLEMA II.

Fractiones decimales addere.

REducantur per præcedens Problema ad eandem denominationem, ſeu expreſſionem per lineas deſignatam; numeri ſic reducti addantur, ut numeri integri; ſummæ huic ſuperponantur lineæ totidem, quot numerus reductus habet.

Sint $\overset{\circ}{3}, \overset{\prime}{4}, \overset{\prime\prime}{2}$ addendæ $\overset{\circ}{4}, \overset{\prime}{2}$

Reductæ fiunt

$$\begin{array}{lr} & 342'' \\ & 420'' \\ \hline \text{Summa} & 762'' \end{array}$$

Fractiones addendæ.

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{5} & \overset{\prime}{7} & \overset{\prime\prime\prime}{4} \\ \overset{\circ}{6} & \overset{\prime}{7} & \overset{\prime\prime}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Reductæ erunt} & 5704''' \\ & 6740''' \\ \hline \text{Summa} & 12444''' \end{array}$$

PROBLEMA III.

Fractiones decimales ſubtrahere.

REducantur ad eandem denominationem, & fiat numerorum ſubtractio, ut in integris, differentiæ, ſeu reſiduo ſuperponantur lineæ numero utrique communes.

Sit fractio $6789'''$, ex qua ſubtrahenda ſit fractio $49''$

Reductæ ſunt	$6789'''$
	$490'''$
Differentia	$6299'''$

Fractio data	$6^{\circ},3',4''$
Subtrahenda	$3',2''$
Reductæ	$6304'''$
	$320'''$
Differentia	$5984'''$

PROBLEMA IV.

Fractiones decimales multiplicare.

SInt $\frac{3}{10}$ multiplicandæ per $\frac{2}{100}$. Si multiplicatio fiat methodo omnibus fractionibus communi, (*) erit productum $\frac{6}{1000}$, Sic

(*) *Per Probl.* 4. *Cap.* 6.

Sic ſi $\frac{4}{100}$ debeat multiplicari per $\frac{6}{1000}$ erit productum $\frac{24}{100000}$, ex quibus ſequitur multiplicandos eſſe numeratores inter ſe, & zeros denominatorum addendos. Eadem methodus in multiplicandis decimalibus, excepto, quod loco addendorum zerorum addendæ ſint lineæ exponentes; ſic ſint

EXEMPLUM I.

Productores	$4^{\prime\prime}$	$6^{\prime}$	$24^{\prime}$
Productores	$4^{\prime\prime\prime}$	$3^{\prime\prime}$	$3^{\prime\prime}$
Producta	$16^{\prime\prime\prime\prime\prime}$	$18^{\prime\prime\prime}$	$72^{\prime\prime\prime}$

EXEMPLUM II.

Productores	$57^{\prime}$	$356^{\prime\prime}$	$482^{\prime\prime}$
Productores	$43^{\prime}$	$14^{\prime}$	$33^{\prime\prime}$
Producta	171	1424	1446
Partialia	228	356	1446
Prod. total.	$2451,^{\prime\prime}$	$4984,^{\prime\prime\prime}$	$15906^{\prime\prime\prime\prime}$

PROBLEMA V.

Fractiones decimales dividere.

QUoniam diviſio oppoſita eſt multiplicationi, hoc eſt, id, quod multiplicatio componit, diviſio ſolvit; diviſio fractionum decimalium fit ut in nu-

meris integris, lineæ vero exponentes diviſoris ſubtrahuntur a lineis exponentibus dividendi.

Dividendi	$\overset{////}{8}$	$\overset{/////}{16}$	$\overset{//}{34}$
Diviſores	$\overset{/}{2}$	$\overset{///}{4}$	$\overset{o}{2}$
Quoti	$\overset{///}{4}$	$\overset{//}{4}$	$\overset{//}{17}$

PROBLEMA IV.

Fractionem decimalem ad aliam fractionem reducere.

Factis operationibus per fractiones decimales, ſæpe utile, imo neceſſarium eſt valorem fractionum harum in partibus aliis notis, & vulgo communibus exhibere, quod per reductionem Problemate XI. Cap. V. Sect. II. traditam obtinetur.

Sic ſint $\overset{/}{6}, \overset{//}{7}, \overset{///}{8}$ partes pedis geometrici, & quæratur, quantus ſit earumdem valor in partibus pedis duodecimis.

Reducantur primo ad expreſſionem ſimplicem, (*) eruntque reductæ $\overset{///}{678}$, ſeu linearum loco ſubſcribendo zeros totidem præfixa unitate $\frac{678}{1000}$, hoc facto reducentur ad partes duodecimas per Problema XI. Cap. V. inferendo ut $1000 : 678 = 12 : x$ Conſequenter (**) $1000\, x = 678 \cdot 12$, ſeu 8136. Et divid. $x = \frac{8136}{1000}$, ſive $8 + \frac{136}{1000}$.

Igitur $\overset{/}{6}, \overset{//}{7}, \overset{///}{8}$ in partibus decimis pedis, valent in partibus duodecimis 8 pollices, plus $\frac{136}{1000}$ unius pollicis. Eo-

(*) *Per Probl. 1. hujus.*
(**) *Per Theor. I. Cap. II. Sect. II.*

Eodem modo reducuntur fractiones decimales, ad partes alias uſitatas.

SCHOLION.

Methodo huic, quæ aliquibus prolixior viſa eſt, alia ſubſtituta, & in uſum introducta eſt, ſcilicet: ut, quot lineæ apponendæ forent datæ fractioni, aut, quod idem eſt, quot zeris conſtaret denominator, tot gradibus, inchoando ab unitatibus, ſeu integris, verſus dextram poneretur fractio, interpoſitis, ſi opus ſit, inter unitates & fractiones zeris.

Sic ſi datæ ſint 4 unitates, & 6 primæ ſeu $\frac{4}{1}$, & $\frac{6}{10}$, quoniam denominator 6 primarum, nempe 10, uno conſtat zero, datæ 6 primæ incipiendo ab unitatibus 4 uno gradu verſus dextram promoventur, ſicque fractio decimalis data nova hac methodo expreſſa, erit 4 . 6; punctum autem 4 unitatibus poſtpoſitum, non multiplicationem, ſed ſitum unitatum determinat, id eſt, punctum denotat numerum, cui poſtponitur, eſſe unitates ſeu integros; reliquos vero ordine ſequentes, fractiones decimales.

Si nullæ unitates, ſeu integri fractionibus adhæreant in loco unitatum zerus ſcribendus eſt. Sic: 0 . 6, denotat nullas eſſe unitates, ſed ſolum ſex primas.

Idem quoque obſervari debet, ſi fractiones decimales non dentur ordine ſuorum graduum decreſcentium, ſic ſi ſcribendæ ſint 2 unitates, & 4 ſecundæ, cum nullæ dentur primæ harum locum zerus ſupplere debet, adeoque hoc modo exprimentur 2 . 04.

Sic ſi dentur 5 unitates, 3 primæ, nullæ ſecundæ, & 8 tertiæ; ſcribantur 5 . 308. Sic fractio 7 . 0003 denotat 7 unitates, & tres quartas. Fractio 0 . 002 nullas unitates, ſed ſolum duas tertias, & ſic de aliis.

Ex

Ex quibus patet, denominationem fractionis datæ deſumi a loco, quem occupat poſt unitates, aut punctum interjectum.

Sic enim in hac 2 . 306 numerus 3, quia primo loco poſt 2 unitates poſitus reperitur, erit numerator fractionis decimalis primæ; numerus 6 utpote tertium locum occupans, erit numerator tertiæ, & ſic de aliis.

Additio & ſubtractio fractionum decimalium hac nova methodo expreſſarum, eo prorſus modo, quo numerorum integrorum peragitur, modo ad eandem denominationem ante operationem reducantur.

EXEMPLUM I.

Sint addendæ 4 primæ, ſeu 0 . 4, ad 5 ſecundas, ſeu 0 . 05. Reducantur 0 . 4 ad ſecundas *per Probl. 1. hujus*, erunt hæ 0 . 40.

Fractiones	0 . 40
Addendæ	0 . 05
Summa	0 . 45

EXEMPLUM II. & III.

Fractiones	2 . 706	1 . 904
Addendæ	3 . 897	0 . 603
Summæ	6 . 603	2 . 507

EXEMPLUM SUBTRACTIONIS.

Sint datæ	6 . 94	4 . 028
A quibus ſubtrah.	2 . 53	0 . 756
Erunt reſidua	4 . 41	3 . 272

Multiplicatio harum fractionum inter ſe, eodem quoque modo inſtituitur, quo integrorum; notandum tamen productum ex hac multiplicatione ortum,

tum, tot conſtare debere notis numericis, quot ſunt in ambobus productoribus ſimul ſumptis. Hinc in caſu, quo illæ in producto deficiunt, eæ zeris verſus ſiniſtram ſupplendæ ſunt.

Sit multiplicanda fractio	o . 205
Per fractionem	o . 43
	615
Erunt producta partialia	820
Productum totale	o . 8815

Productum totale o . 8815, quia tamen hoc productum paucioribus notis conſtat, quam duo productores, zerus verſus ſiniſtram adjiciendus erit, conſequenter productum verum erit o . 08815. Idem obſervandum in aliis.

Diviſio item fit modo numerorum integrorum; niſi quod quotus tot conſtare debeat notis, quot ſunt dividendi minus notis diviſoris; hinc in caſu, quo dictus numerus notarum vel deficeret, vel ſuperaret dictam conditionem, zeris, aut addendis verſus ſiniſtram, aut ſubtrahendis ſuppleri debet.

Sic, ſi o . 008 dividatur per o . 04, quotus erit o . 2.

Sic ex diviſione o . 0006 per o . 02, erit o . 03. Idem eſt de aliis.

Si numerus integer mnltiplicandus ſit per fractionem decimalem, fiat multiplicatio methodo numerorum integrorum, & producto verſus ſiniſtram tot zeri præfigantur, ut productum totidem notis conſtet, quot data fractio.

Sic productum ex 4 multiplicatis per o . 008, erit o . 032, eodem modo productum ex 16 per o . 0003, erit o . 0048.

E contra ſi integer dividendus ſit per fractionem decimalem; dividantur numeri, ut in integris, & quo-

quoto verſus dextram adjiciantur zeri, ut tot conſtet notis, quot data fractio dividens.

DE ALGORITHMO POTESTATUM COGNATARUM.

CAPUT VII.

Poteſtates cognatas vocamus eas, quæ ex communi radice generantur. Hujusmodi ſunt omnes poteſtates, quarum radix communis eſt *a*.

Si ex quantitate *a* fiant poteſtates, id obſervare licet, toties literam contineri in poteſtate, quot ſunt poteſtatis gradus, ut ex figura liquet.

Poteſtas nulla	1	Tertia	*aaa*
Poteſtas prima	*a*	Quarta	*aaaa*
Secunda	*aa*	Quinta	*aaaaa*

Ex hac obſervatione orta eſt methodus exprimendi dictas poteſtates modo multo breviore; nempe: literæ datæ, ex. gr. *a* verſus dextram ſuperſcribitur numerus reſpondens gradui poteſtatis datæ.

Sic poteſtas nulla	$= a^0$	Tertia	$= a^3$
Poteſtas prima	$= a^1$	Quarta	$= a^4$
Poteſtas ſecunda	$= a^2$	Quinta	$= a^5$

Numerus appoſitus vocatur *Index*, aut *Exponens*, aut *Logarithmus*.

PROBLEMA I.

Addere cognatas poteſtates.

Jungantur ſigno +

Sint addendæ a^4, a^2

Erit ſumma $a^4 + a^2$

PRO-

PROBLEMA II.

Subtrahere.

MUtetur ſignum ſubtrahendæ, & ſimul jungantur.

Sit ex a^5 ſubtrahenda a^3

Erit differentia $a^5 - a^3$

PROBLEMA III.

Multiplicare.

ADdantur exponentes, ut in figura.

a^3 multiplicata per $a^3 = a^6$	a^3 per $a^8 = a^{11}$
a^6 per $a^3 = a^9$	$a^2 b^4$ per $a^2 b^3 = a^4 b^7$
a^n per $a^m = a^{m+n}$	$a^3 c$ per $a^3 c^7 = a^6 c^8$

PROBLEMA IV.

Dividere.

SUbtrahatur exponens diviſoris ab exponente dividendi.

a^5 diviſa per $a^2 = a^3$	a^3 per $a^5 = a^{-2}$
a^6 per $a^4 = a^2$	a^4 per $a^4 = a^0$
a^n per $a^m = a^{n-m}$	a^6 per $a^9 = a^{-3}$

SCHOLION.

CUm exponens eſt negativus, tum quantitas eſt fractio, cujus numerator eſt 1, & denominator potentia determinata ab exponente.

$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-5} = \frac{1}{a^{5}}$
$a^{-2} = \frac{1}{aa}$	$a^{-7} = \frac{1}{a^{7}}$
$a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

PROBLEMA V.

Poteſtatem ad poteſtatem elevare.

Multiplicetur exponens poteſtatis datæ per exponentem poteſtatis, ad quam elevari debet.

a^{2} ad poteſtat. tertiam $= a^{6}$	abb ad ſecundam $= aab^{4}$
a^{2} ad quartam $= a^{8}$	abb ad tertiam $= a^{3}b^{6}$
a^{3} ad quintam $= a^{15}$	a^{-2} ad quartam $= a^{-8}$
a^{1} ad ſeptimam $= a^{7}$	a^{m} ad quamcunq; $n = a^{mn}$

Eadem eſt methodus elevandi poteſtates binomias, trinomias, &c. Sic

$(a+x)^{3}$ elevata ad poteſtatem quartam $= (a+x)^{12}$

$(aa+zz)^{2}$ elevata ad quintam $= (aa+zz)^{10}$

PRO-

PROBLEMA VI.

Extrahere radices.

DIvidatur exponens datæ poteſtatis per exponentem radicis, quæ debet extrahi.

$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$	$\sqrt[5]{a^{-10}} = a^{\frac{-10}{5}} = a^{-2}$
$\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$	$\sqrt[7]{a^8} = a^{\frac{8}{7}}$
$\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt[5]{a^1} = a^{\frac{1}{5}}$	

Idem eſt de poteſtatibus binomiis, trinomiis &c.

$$\sqrt[4]{\ } \text{ de } (a+x)^{12} = (a+x)^{\frac{12}{4}} = (a+x)^3$$

$$\sqrt[5]{\ } \text{ de } (aa+zz)^{10} = (aa+zz)^{\frac{10}{5}} = (aa+zz)^2$$

SCHOLION.

HÆc Problemata maximi momenti ſunt in calculis ſublimioribus, ut inferius patebit.

DE ALGORITHMO RADICUM.

CAPUT VIII.

EX quantitatibus radicalibus aliæ ſunt *ſimplices*, aliæ *compoſitæ*.

Simplices dicuntur, quæ uno termino conſtant, ut $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab}$. Compoſitæ vero, quæ ex pluribus, ut $2 + \sqrt{3}$, $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Harum compoſitarum aliquæ dicuntur *univerſales*, eæ nempe, quæ ad compoſitum radicale extenduntur.

Ut: $(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3}.)}$

THEOREMA I.

Radix quadrata producti duorum quadratorum inter ſe, eſt productum ipſarum radicum.

Si quadratum aa multiplicetur per aliud quadratum bb, exurget productum $aabb$; ſed hujus radix eſt ab, productum nempe radicum a & b. Ergo.

$4 \cdot 9 = 36$, cujus radix $= 2 \cdot 3 = 6$
$9 \cdot 16 = 144$, cujus radix $= 3 \cdot 4 = 12$

THEOREMA II.

Si cubus a^3 multiplicetur per cubum b^3, fit cubus $a^3 b^3$, cujus radix cubica eſt ab, productum nempe radicum.

$8 \cdot 27 = 216$, cujus radix cubica $= 2 \cdot 3 = 6$
$8 \cdot 64 = 512$, cujus radix cubica $= 2 \cdot 4 = 8$

THEOREMA III.

Si quarta poteſtas a^4 multiplicetur per quartam poteſtatem b^4, fit quarta poteſtas $a^4 b^4$, cujus radix quarta ab eſt productum radicum.

$16 \cdot 81 = 1296$, cujus radix quarta $= 2 \cdot 3 = 6$

COROLLARIUM.

Idem eſt de quibuscunque poteſtatibus.

PROBLEMA I.

Radices ad ſimpliciorem formam reducere.

Sint primo reducendæ radices quadratæ. Ex. gr. $\sqrt{18}$. Concipiatur numerus 18 tanquam quadra-

dratum productum ex duobus quadratis, hoc eſt, quærantur per diviſionem duo factores numeri 18, quorum unus ſaltem ſit perfecte quadratus, qui in noſtro exemplo ſunt 9 & 2, quorum primus nempe 9 eſt perfecte quadratus, 2 vero conſideratur tantum reductionis gratia, ut quadratus, eſt adeo $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9}$. Jam cum *per Theor. I.* radix primi quadrati 9, id eſt 3, multiplicata per radicem ſecundi, nempe $\sqrt{2}$ debeat eſſe æqualis radici quadratæ producti duorum quadratorum, habebitur $\sqrt{18}$, ſeu $\sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$, *quod erat faciendum.* Sic:

$$\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}.$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}.$$
$$\sqrt{aab} = \sqrt{b \cdot aa} = a\sqrt{b}.$$
$$\sqrt{27aac} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot aa \cdot c} = 3a\sqrt{3c}$$
$$\sqrt{12a^3b^3} = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot a^2b^2 \cdot ab} = 2ab\sqrt{3ab}$$
$$\sqrt{32a^4bb} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot a^4bb} = 4aab\sqrt{2}.$$

Eadem methodo reducuntur radices cubicæ, quarum demonſtratio *a Theoremat. II. hujus cap.* petenda eſt. Sic:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = 2\sqrt[3]{2}.$$
$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = 3\sqrt[3]{2}.$$
$$\sqrt[3]{a^3b^3c} = \sqrt[3]{a^3b^3 \cdot c} = ab\sqrt[3]{c}.$$
$$\sqrt[3]{64a^3b^3cc} = \sqrt[3]{64 \cdot a^3b^3 \cdot cc} = 4ab\sqrt[3]{cc}.$$

Eadem erit methodus pro radicibus quartis, quintis &c.; eadem quoque eſt pro radicibus compoſitis.

COROLLARIUM I.

HAc ergo methodo comparari poterunt radices inter ſe, & earum ratio determinari.

Ita quia $\sqrt{48}$, & $\sqrt{27}$ ſunt eædem, ac $4\sqrt{3}$, & $3\sqrt{3}$; erunt inter ſe, ut $4 : 3$.

Duo tamen notanda ſunt, nempe, ut & radices ſint ejuſdem ordinis, & reductarum quantitates poſt ſignum $\sqrt{}$ exiſtentes ſint æquales. Quas conditiones ſi duæ radices reductæ habeant, dicuntur *Communicantes*.

COROLLARIUM II.

Quemadmodum autem ex $\sqrt{48}$ fit $4\sqrt{3}$; extrahendo ſcilicet radicem quadratam 4 ex uno productorum, nempe 16, eamque ſigno radicali præponendo; ita $4\sqrt{3}$ reſtituetur ad expreſſionem priorem; ſi ex 4 fiat quadratum 16, illudque poſt ſignum radicale poſitum multiplicetur per 3, eritque $\sqrt{3 \cdot 16} = \sqrt{48}$.

SCHOLION.

Quod ſi nullus factor ſit quadratus, quantitas ſigno radicali affecta erit irreducibilis.

PROBLEMA II.

Radices diverſæ ſpeciei ad eandem ſpeciem reducere.

Radices diverſæ ſpeciei vocantur illæ, quæ diverſos habent exponentes, ex. gr. $\sqrt[3]{4}$ & $\sqrt[2]{8}$; Ejuſdem ſpeciei, quæ eoſdem, ut $\sqrt[2]{9}$, & $\sqrt[2]{6}$.

Sint $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[2]{9}$ reducendæ ad eandem ſpeciem. Quoniam illæ eædem ſunt cum his $\sqrt[3]{2^1}$ & $\sqrt[2]{9^1}$, erunt quoque eæ (*) æquales his per exponentes expreſſis $2^{\frac{1}{3}}$ & $9^{\frac{1}{2}}$ Harum exponentes, qui veri ſunt

(*) *Per Probl. 6. Cap. 7. Sect. 2.*

ſunt fracti, reducantur ad eandem denominationem, (*) erunt hæ reductæ $2^{\frac{2}{6}}$ & $9^{\frac{3}{6}}$. Porro quantitates 2 & 9 eleventur ad eas poteſtates, quas denotant exponentium reductorum numeratores, nempe 2 ad ſecundam, & 9 ad tertiam; & præfixo ſigno √ ſuperſcribatur denominator communis; erunt eæ $\sqrt[6]{4}$, & $\sqrt[6]{729}$ reductæ ad eandem ſpeciem. Sic:

$$\sqrt[3]{2}, \& \sqrt[2]{9} = 2^{\frac{1}{3}} \& 9^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}} \& 9^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{4} \& \sqrt[6]{729}$$

$$\sqrt[3]{3}, \& \sqrt[4]{5} = 3^{\frac{1}{3}} ; 5^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{12}} ; 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{81} ; \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[3]{a}, \& \sqrt[2]{b} = a^{\frac{1}{3}} ; b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}} ; b^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{aa} ; \sqrt[6]{b^3}.$$

PROBLEMA III.

Addere radices.

REducantur, ſi fieri poteſt, ad ſimplicem expreſſionem; (**) & ſi ſunt communicantes, addantur numeri extra ſignum √ poſiti; ſecus jungantur ſuis ſignis.

Radices	$\sqrt{48}$, *reducta ad*		$= 4\sqrt{3}$
Addendæ	$\sqrt{27}$, *ſimplicem expreſſ.*		$= 3\sqrt{3}$
	Summa		$7\sqrt{3} = \sqrt{147}$

 Ra-

(*) *Per Probl. I. Cap. V. Sect. II.*
(**) *Per Probl. I. huj.*

Radices	$\sqrt{aab} = a\sqrt{b}$	
Addendæ	$\sqrt{9aab} = 3a\sqrt{b}$	
Summa	$4a\sqrt{b} = \sqrt{16aab}$	

Radices	$\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$
Addendæ	$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$
Summa	$5\sqrt[3]{2} = \sqrt{250}$

PROBLEMA IV.

Subtrahere radices.

REducantur, ſi fieri poteſt, ad ſimplicem expreſſionem; & ſi ſunt communicantes, fiat ſubtractio numerorum extra ſignum $\sqrt{}$ poſitorum; ſecus conjungantur mutato ſigno radicis ſubtrahendæ in contrarium.

$$\text{Subtrahendæ}\quad \begin{matrix}\sqrt{48}\\ \sqrt{27}\end{matrix}\ \text{reductæ}\ \begin{matrix}= 4\sqrt{3}\\ = 3\sqrt{3}\end{matrix}$$

$$\text{Differentia} \quad = \sqrt{3}$$

$$\text{Subtrah.}\quad \sqrt[3]{16a^3b} = 2a\sqrt[3]{2b}$$

$$\sqrt[3]{16b^4} = 2b\sqrt[3]{2b}$$

$$\text{Differentia} \quad = \overline{2a - 2b}\sqrt[3]{2b}$$

PROBLEMA V.

Multiplicare radices.

SI radices ejuſdem ſint ſpeciei, multiplicentur quantitates inter ſe, ſervata regula ſignorum multiplicantium + vel −. Radix hujus producti erit (*) pro-

(*) *Per Theor. I. II. & III. hujus.*

productum quæſitum. Quod in quadratis, ſi quantitas ſigno $\sqrt{}$ affecta ſit exacte quadrata, ex quantitate radix extracta ſine ſigno $\sqrt{}$ pro producto ponitur.

$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{6}$	$\sqrt[4]{ab}$	$\sqrt{a}$
$\sqrt{6}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{-2}$	$\sqrt[4]{ac}$	$\sqrt{a}$
Producta $\sqrt{30}$	$\sqrt[3]{12}$	$\sqrt[3]{-12}$	$\sqrt[4]{aabc}$	$\sqrt{aa} = a$

Si ſunt diverſæ ſpeciei, reducantur ad eandem. (*)

$\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$	$-\sqrt[3]{3} = -\sqrt[6]{9}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$
$\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[6]{4}$	$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$	$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$
Producta $\sqrt[6]{108}$	$-\sqrt[6]{72}$	$\sqrt[12]{432}$

~~CAPUT IX.~~ problema

Radices dividere.

Si ſunt ejuſdem ſpeciei, dividantur poteſtates per poteſtates, & quoto præfigatur eadem radix, ſeu exponens, ſervata lege ſignorum dividentium +, vel −.

Dividendæ	$\sqrt{9}$	$-\sqrt[3]{6}$	$-\sqrt{aab}$	$\sqrt{16aac}$
Dividentes	$\sqrt{3}$	$-\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{ba}$	$-\sqrt{4ac}$
Quoti	$\sqrt{3}$	$+\sqrt[3]{3}$	$-\sqrt{a}$	$-\sqrt{4a}$

(*) *Per Problema II. huj.*

SCHOLION I.

Eadem eſt methodus multiplicandi, & dividendi radices imaginarias, ubi notandus error viri clariſſimi Ozanam in Algebræ Libro I. putantis imaginarium per imaginarium ſemper imaginarium producere.

Multiplicandæ	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-5}$
	$\sqrt{-2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{-9}$	$-\sqrt{4}$
Producta	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{-6}$	6	$-\sqrt{-20}$

Dividendæ	$\sqrt{-4}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{-20}$
	$\sqrt{-2}$	$\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-2}$	$-\sqrt{-4}$
Quoti	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-4}$	$-\sqrt{5}$

SCHOLION II.

His probe intellectis Algorithmus radicum ſimplicium facile applicabitur Algorithmo radicum compoſitarum, & univerſalium modo ea notentur, quæ de Algorithmo polynomiorum Sect. 1. Cap. 2. dicta ſunt. Juvat tamen claritatis gratia nonnulla exempla recenſere.

Exempla additionis radicum compoſitarum.

Radices	$3+\sqrt{3}$	$2\sqrt{a}-4\sqrt{b}$	$\sqrt[3]{aa}-\sqrt[3]{ab}$
Addendæ	$4+2\sqrt{3}$	$6\sqrt{a}+2\sqrt{b}$	$3\sqrt[3]{aa}-\sqrt[3]{ab}$
Summæ	$7+3\sqrt{3}$	$8\sqrt{a}-2\sqrt{b}$	$4\sqrt[3]{aa}-2\sqrt[3]{ab}$

Exem-

Exempla ſubtractionis.

Rad. dat.	$6+3\sqrt{8}$	$3a+a\sqrt{ab}$	$\sqrt[3]{aa}-2\sqrt[3]{ab}$
Subtrah.	$7+\sqrt{8}$	$a-2a\sqrt{ab}$	$2\sqrt[3]{aa}-\sqrt[3]{ab}$
Mutatis ſignis	$-7-\sqrt{8}$	$-a+2a\sqrt{ab}$	$-2\sqrt[3]{aa}+\sqrt[3]{ab}$
Differentiæ.	$-1+2\sqrt{8}$	$2a+3a\sqrt{ab}.$	$-\sqrt[3]{aa}-\sqrt[3]{ab}$

Exempla multiplicationis.

Radic.	$4+\sqrt{3}$	$a+\sqrt{bc}$	$\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}$
multiplicād	$2+\sqrt{2}$	$a-\sqrt{bc}$	$\sqrt{ab}-4\sqrt{ac}$,
Prod.	$8+2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+\sqrt{6}$	$aa-bc$	$ab-6\sqrt{aabc}+8ac$

Radix irrationalis multiplicata per radicem item irrationalem dare poteſt radicem rationalem, ut ex multiplicatione patet; hinc harum una dicitur etiam alterius *contrarium*. Hujusmodi contraria radicum irrationalium ſimplicium facile reperiuntur, non item compoſitarum, ut ex conſideratione ſubjectæ figuræ liquet. Qua autem ratione hæc reperiri queant, in parte ſecunda hujus opuſculi tradetur.

Irrationales.	*Contraria*	*Producta rationalia.*
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{aa}=a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{aa}$	$\sqrt[3]{aaa}=a$
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{a^3}$	$\sqrt[4]{a^4}=a$
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$	$\sqrt[n]{a^n}=a$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$=\sqrt{aa}-\sqrt{bb}$
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}$
$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$	$=\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}$

Exempla diviſionis.

SI dividenda ſit radix compoſita per ſimplicem, diviſio peragitur, ut in polynomiis factum; ſic ſi $\sqrt{6}+\sqrt{15}-\sqrt{12}$ dividenda ſit per $\sqrt{3}$, dividendo partes ſingulas reperietur quotus $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{4}$.

Verum cum hæc methodus dividendi radices univerſalis non ſit, pro diviſione radicum compoſitarum per compoſitas alia reperta eſt, nempe: ut per contrarium diviſoris multiplicetur tam dividendus, quam ipſe diviſor datus; hac enim ratione reducitur diviſio ad methodum priorem. Sic:

Sit dividendus $\sqrt{6}+\sqrt{15}-\sqrt{12}$ per $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Exprimantur primo per modum fracti, erunt adeo $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, multiplicetur porro terminus uterque per contrarium denominatoris, nempe per $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, reperietur productum valoris ejuſdem cum priore, ut ex doctrina fractionum patet, nempe:

$$\frac{\sqrt{18}-\sqrt{45}-\sqrt{36}-\sqrt{30}+\sqrt{24}}{\sqrt{9}-\sqrt{4}}$$

Seu denominatorem ad expreſſionem ſimplicem reducendo ſcilicet ad $3-2=1$, erit

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{45}-\sqrt{36}-\sqrt{30}+\sqrt{24}}{1.}$$

Pluri-

Pluribus de his radicibus compoſitis, & univerſalibus agetur Parte II. hujus opuſculi.

APPLICATIO ANALYSIS AD PROBLEMATA SIMPLICIA.

CAPUT IX.

PRoblemata Arithmetica ad duas reducuntur ſpecies. Ad Problemata nempe *determinata* & *indeterminata*. *Determinata* dicuntur ea, quorum tot ſunt conditiones, quot quantitates quæſitæ. *Indeterminata*, quorum conditiones pauciores ſunt, quam quantitates quæſitæ.

Proclus quidem Euclidis Commentator, & Joannes Pellius tertiam quoque ſpeciem addunt, problemata nempe *determinatis majora*, quorum plures ſunt conditiones, quam quantitates quæſitæ. Sed cum hæc ad primam ſpeciem reduci poſſint, ea rectius problematibus determinatis adnumerantur.

Cum problema eſt determinatum, tum neceſſe eſt tot æquationes fieri, quot ſunt quæſitæ quantitates. Sic enim ſingulis per ſubſtitutionem exterminatis ad unam quæſitam reducuntur, qua reperta, cæteræ etiam determinantur.

Sed cum problema indeterminatum eſt, neceſſe eſt, ut plures incognitæ remaneant, quibus arbitrario determinatis reducitur Problema ad determinatum, ut exemplis fiet manifeſtum; notentur præterea ea, quæ Sectione I., principio capitis IV. dicta ſunt.

PROBLEMA I.

DIvidere 60 in duas partes, quarum major ſit minoris quintupla.

Pars

Pars major $= 5x$
Pars minor $= x$

Erit ergo ex conditione Problematis

$5x + x = 60$

Seu $6x = 60$

Et divid. per 6, fit $x = 10$

Partes ergo quæſitæ ſunt 50 & 10 = 60

Univerſaliter.

Dividere a in duas partes, ut prima ad ſecundam ſit in ratione $m : 1$

Pars prima $= y$
ſecunda $= x$

Erit $y + x = a$

Jam per conditionem Problematis $y : x = m : 1$
Igitur multiplic. media & extrema, erit $y = mx$
Et loco y ſubſtituendo in prima æquatione mx
Erit $mx + x = a$
Et quoniam $mx + x$ eſt productum ex $m + 1$ in x
Erit dividendo per $m + 1$ $x = \frac{a}{m+1}$

PROBLEMA II.

Dividere 60 in duas partes, ut quadrans primæ cum ſemiſſe ſecundæ componant 20.

Pars prima x
ſecunda y

Erit per primam conditionem $x + y = 60$ A
Et per conditionem ſecundam $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 20$ B

Et ſublatis fractionibus in æquatione ſecunda B, quod fit reducendo illas ad eandem denominationem

nem, & per denominatorem communem, multiplicando terminos alterius partis.

Erunt reductæ $\frac{2x + 4y}{8} = 20$ B

Et multipl. per 8 erit $2x + 4y = 160$ B

Quare $2x = 160 - 4y$

Et divid. per 2 erit $x = 80 - 2y$

Subſtituendo in prima æquatione A, $80 - 2y$ loco x,

Fit $80 - 2y + y = 60$ A

Hoc eſt $80 - y = 60$

Et addendo $+ y$, erit $80 = y + 60$

Et ſubtrah. 60 erit $80 - 60 = y + 60 - 60$

Seu $20 = y$

Invento autem valore y, ſi loco ejus in prima æquatione A ſubſtituantur 20, erit $x + 20 = 60$, conſequenter $x = 60 - 20 = 40$.

Partes ergo quæſitæ ſunt 40 & 20

Univerſaliter.

Dividere a in duas partes, quarum prima diviſa per m cum ſecunda diviſa per n, conficiant quantitatem datam b.

Pars prima $= x$

ſecunda $= y$

Ergo per conditionem primam $x + y = a$ A

Et per ſecundam $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = b$ B

Sublatis fractionibus in ſecunda

Erit $nx + my = mnb$ B

Quare $nx = mnb - my$

Et

Et dividd. per n erit $x = \frac{mnb}{n} - \frac{my}{n}$

Quare ſi in prima æquatione A loco x ſubſtituatur $\frac{mnb}{n} - \frac{my}{n}$

Erit $\frac{mnb}{n} - \frac{my}{n} + y = a$ A

Et multiplic. per n fiet $mnb - my + ny = an$
Porro add. $+my - ny$ erit $mnb = an + my - ny$
Et add. $-an$ habebitur $mnb - an = my - ny$
Jam, quia $my - ny$ eſt productum ex $m - n$ per y
Erit divid. utramque partem per $m - n$

$$\frac{mnb - an}{m - n} = y$$

PROBLEMA III.

Ætas Petri tripla eſt ætatis Pauli. Ætas Antonii eſt ſextupla ejusdem Pauli. Summa ætatum eſt 150. Quæruntur ſingulorum ætates.

Igitur per conditiones Problematis
Ætas Pauli $= x$, Petri $3x$, Antonii $6x$
Conſequenter $x + 3x + 6x = 150$
Seu $10x = 150$
Et divid. per 10, reperitur $x = \frac{150}{10} = 15$
Ætas Pauli 15, Petri $15 . 3 = 45$. Antonii $15 . 6 = 90$. Summa omnium $= 150$, ut ponebatur.

Univerſaliter.

Ætas Petri ad ætatem Pauli eſt ut $m : 1$, & Ætas Antonii eſt ad eandem ætatem Pauli, ut $n : 1$. Summa vero ætatum eſt $= b$.

Quæ-

Quæruntur ætates ſingulorum.

Ætas Pauli $= x$

Petri $= y$

Antonii $= z$

Erit per conditionem tertiam

Summa ætatum $x + y + z = b$ A

Exterminandi jam ſunt duo incogniti y & z, quod obtinetur per primam & ſecundam conditionem.

Quare per primam $y : x = m : 1$

Erit multipl. media & extrema $y = mx$

Et per conditionem ſecundam $z : x = n : 1$

Multiplic. media & extrema $z = nx$

Igitur loco y & z ſubſtit. mx & nx in æquatio. A

Erit $x + mx + nx = b$ A

Et divid. per $1 + m + n$ erit $x = \frac{b}{1+m+n}$.

PROBLEMA IV.

Invenire duos numeros, quorum primus ſit triplus ſecundi; at, ſi a 30 ſubtrahatur primus, & a 16 ſecundus, reſidua ſint æqualia.

Per conditionem primam Probl.

Numerus primus $= 3x$

ſecundus $= x$

Et per conditionem ſecundam

$$30 - 3x = 16 - x$$

Et add. $+3x - 16$ erit $30 - 16 = 2x$

Hoc eſt $14 = 2x$

Et divid. per 2 erit $\frac{14}{2}$ ſeu $7 = x$.

Numeri adeo quæſiti ſunt 21, & 7, qui dictas conditiones habent.

Univerſaliter.

INvenire duas quantitates, quarum prima ſit ad ſecundam, ut $m : 1$, ſubtracta vero quantitate prima a data aliqua a, & ſecunda ab altera item data b reſidua maneant æqualia.

Quantitas prima $= y$

ſecunda $= x$

Per conditionem primam habetur

$x : y = m : 1$

Et multipl. media, & extrema $y = mx$

Eſt vero per conditionem ſecundam

$a - mx = b - x$

Et add. $+ mx - b$ erit $a - b = mx - x$

Et divid. per $m - 1$ fit $\frac{a-b}{m-1} = x$

PROBLEMA V.

INvenire duos numeros, quorum primus ſit ſecundi quintuplus, ſed addendo 4 primo, & 6 ſecundo ſummæ ſint, ut $4 : 1$

Numerus primus $5x$

Secundus x

Erit per conditionem ſecundam Problematis

$5x + 4 : x + 6 = 4 : 1$

Multipl. med. & extr. $5x + 4 = 4x + 24$

Et add. $- 4x - 4$, erit $x = 24 - 4$

Hoc eſt $x = 20$

Numeri ergo ſunt 100 & 20

Univerſaliter.

Invenire duas quantitates, quarum prima ſit ad ſecundam, ut $m : 1$, ſed ad primam addendo a, & ad ſecundam b, ſummæ ſint, ut $n : 1$

Quan-

Quantitas prima $= y$
ſecunda $= x$
Per conditionem primam $y : x = m : 1$
Multipl. med. & extr. $y = mx$
Per conditionem ſecundam $mx + a : x + b = n : 1$
Multipl. med. & extrema $mx + a = nx + bn$
Et add. $- nx - a$ erit $mx - nx = bn - a$
Et divid. per $m - n$ fit $x = \frac{bn - a}{m - n}$

PROBLEMA VI.

INvenire numerum, cujus reſiduum, ſi auferantur 20, ſit ad reſiduum ejusdem ſi auferantur 100, ut 3 : 1.
Numerus quæſitus x
Ergo per condit. probl. $x - 20 : x - 100 = 3 : 1$
Erit multipl. med. & extr. $x - 20 = 3x - 300$
Et add. $+ 300 - x$, erit $300 - 20 = 2x$
Hoc eſt $280 = 2x$
Et divid. per 2, erit $140 = x$

Univerſaliter.

Invenire quantitatem, ex qua ſubtrahendo a, dein vero b; reſidua ſint ut $m : 1$
Quantitas quæſita x
Per conditionem probl. $x - a : x - b = m : 1$
Et multipl. med. & extr. $x - a = mx - mb$
Add. $+ mb - x$ erit $mb - a = mx - x$
Et divid. per $m - 1$ erit $\frac{mb - a}{m - 1} = x$

PROBLEMA VII.

INvenire duos numeros hujus conditionis, ut ſi unitas addatur primo, & eadem a ſecundo tollatur numerus primus ſit ad ſecundum, ut 2 : 1, hoc eſt, primus ſit duplus ſecundi, at ſi unitas tollatur a primo, & addatur ſecundo, numeri prodeant æquales.

Numerus primus x
ſecundus y
Quare per primam conditionem
$x + 1 : y - 1 = 2 : 1$
Et multipl. med. & extr. fit $x + 1 = 2y - 2$
Et add. -1, erit $x = 2y - 3$ A
Jam per conditionem ſecundam $x - 1 = y + 1$ B
Et add. $+1$, erit $x = y + 2$
In æquatione A loco x ſubſtituendo $y + 2$
Erit $y + 2 = 2y - 3$
Et add. $+3 - y$, erit $3 + 2 = 2y - y$
Hoc eſt $5 = y$
Numeri ergo quæſiti ſunt 7 & 5.

Univerſaliter.

Invenire duas quantitates, ut primæ addendo a, & idem ſubtrahendo a ſecunda; fiant quantitates, ut $m : 1$. Sed a prima tollendo a, & addendo ſecundæ, fiant æquales.

Quantitas prima x, ſecunda y
Per primam conditionem $x + a : y - a = m : 1$
Et mult. med. & extrem. $x + a = my - am$.
Et add. $-a$, fiet $x = my - am - a$ A
Per conditionem ſecundam $x - a = y + a$ B
Et add. $+a$, fiet $x = y + 2a$

Jam

Jam in æquatione A loco x ſubſtituendo $y + 2a$

Erit $y + 2a = my - am - a$ A

Et add. $+ am + a$, fiet $y + am + 3a = my$

Et add. $- y$, erit $am + 3a = my - y$

Dividendo per $m - 1$, erit $\frac{am + 3a}{m - 1} = y$

PROBLEMA VIII.

INvenire numerum, cujus ſemiſſis cum triente & quadrante conficiant 26

Numerus quæſitus x

Ergo per conditionem probl. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 26$

Reducendo ad eandem denominationem

Erunt $\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = 26$

Fractiones addendo erunt $\frac{26x}{24} = 26$

Et multipl. per 24, erit $26x = 26 . 24$

Hoc eſt $26x = 624$

Et divid. per 26, erit $x = \frac{624}{26} = 24.$

Univerſaliter.

Invenire quantitatem, quæ diviſa per m, n, p, conficiat q.

Quantitas quæſita x

Ergo $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} = q$

Et reducendo ad eandem denominationem

Erunt $\frac{npx + mpx + mnx}{mnp.} = q.$

Et multipl. per mnp, erit $npx + mpx + mnx = mnpq$

Et divid. per $np + mp + mn$, erit $x = \frac{mnpq}{np + mp + mn}$

PROBLEMA IX.

Dividere 42 in tres partes continue proportionales geometricas, quarum ratio ſit, ut 1 : 4 : 16

Pars prima x, ſecunda $4x$, tertia $16x$

Conſequenter $x + 4x, + 16x = 42$

Hoc eſt $21x = 42$

Et divid. per 21, erit $x = 2$

Partes ergo ſunt 2, 8, 32

Univerſaliter.

Dividere a in tres partes continue proportionales geometricas, quarum ratio ſit ut 1 : n : nn.

Pars prima x, ſecunda nx, tertia nnx

Ergo $x + nx + nnx = a$

Et dividendo per $1 + n + nn$

Erit $x = \frac{a}{1 + n + nn}$

PROBLEMA X.

Invenire duos numeros, quorum differentia eſt 24, & ſumma 46.

Numerus primus x, ſecundus y

Per primam conditionem $x - y = 24$ A

Per ſecundam $x + y = 46$ B

In

In æquatione A $x = 24 + y$
Et ſubſtituendo loco x in æquatione B
Erit $24 + 2y = 46$
Et add. -24, fit $2y = 46 - 24 = 22$
Et divid. per 2 fiet $y = \frac{22}{2} = 11$

Quo invento fit $x = 35$

Univerſaliter.

Invenire duas quantitates, quarum differentia eſt a, & ſumma b.
Quantitas prima x, ſecunda y
Per primam conditionem $x - y = a$ A
Per ſecundam $x + y = b$ B
In æquatione A $x = a + y$
Subſtituendo in B $a + 2y = b$
Et add. $-a$, erit $2y = b - a$
Et dividendo per 2 erit $y = \frac{b - a}{2}$

PROBLEMA XI.

INvenire tres numeros hujus conditionis, ut primus additus tertio faciat 24, primus additus ſecundo 18, ſecundus tertio 22.

Numeri quæſiti. Primus x, ſecundus y, tertius z.
Per conditionem primam $x + z = 24$ A
Secundam $x + y = 18$ B
Tertiam $y + z = 22$ C
In æquatione A erit $x = 24 - z$ A
Et ſubſtituendo in B erit $24 - z + y = 18$
Addendo $-18 + z$ fiet $24 - 18 + y = z$
Seu $6 + y = z$ B

Subſtituendo in C erit	$6 + y + y = 22$	
Hoc eſt	$2y + 6 = 22$	
Addendo — 6 erit	$2y = 22 - 6 = 16$	
Et divid. per 2 fiet	$y = \frac{16}{2} = 8.$	C

Conſequenter cum in æquatione B ſit $z = 6 + y$, erit $z = 6 + 8 = 14$, & in A. cum $x = 24 - z$, erit $x = 24 - 14 = 10$.

Numeri adeo reperti ſunt $x = 10, y = 8, z = 14$.

Univerſaliter.

Invenire tres quantitates, quarum ſingulæ cum ſingulis conficiant quantitates datas.

Sint quæſitæ x, y, z.

Erit per conditionem	primam	$x + z = a$	A
	ſecundam	$x + y = b$	B
	tertiam	$y + z = c.$	C
In æquatione A		$x = a - z$	
Subſtituendo in B		$a - z + y = b$	
Add. $- b + z$ erit		$a - b + y = z.$	
Subſtituendo in C erit		$a - b + y + y = c.$	
Hoc eſt		$a - b + 2y = c$	
Addendo $- a + b$ erit		$2y = c + b - a$	
Et divid. per 2 fiet		$y = \frac{c + b - a}{2}.$	

PROBLEMA XII.

INvenire quatuor numeros, ut terni ſibi additi conficiant poſtulatos numeros, nempe, ut primus cum ſecundo & tertio faciat 20; ſecundus cum tertio, & quarto 22; tertius cum quarto & primo 24, quartus cum primo & ſecundo 27. Sint numeri quæſiti, primus x, ſecundus y, tertius z, quartus u, ut

ut calculo breviore problema abſolvatur, ſumma horum omnium dicatur S.

Hoc eſt $x + y + z + u = S$.

Et add. $- x - y - z$, erit $u = S - x - y - z$

Sed per conditionem primam

$x + y + z = 20$

Ergo $u = S - 20$

Sic quoque $x = S - 22$

Reperiuntur $y = S - 24$

$z = S - 27$

Et addendo has æquationes

Erit $u + x + y + z = 4S - 93$.

Hoc eſt, cum fuerit $u + x + y + z = S$.

Erit quoque ſubſtituendo $4S - 93 = S$.

Et add. $- S + 93$ erit $4S - S = 93$.

Hoc eſt $3S = 93$

Et divid. per 3, erit $S = \frac{93}{3} = 31$.

Igitur $u = S - 20 = 31 - 20 = 11$

$x = S - 22 = 31 - 22 = 9$

$y = S - 24 = 31 - 24 = 7$

$z = S - 27 = 31 - 27 = 4$

Univerſaliter.

Sint quæſiti $x + y + z + u = S$

Erit $u = S - x - y - z$

Sed $x + y + z = a$ per conditionem primam

Ergo ſubſtituendo erit $u = S - a$

Et ſic reperitur $x = S - b$

$y = S - c$

$z = S - d$

& add. erit $x + y + z + u = 4S - a - b - c - d$.

Hoc eſt $S = 4S - a - b - c - d$.

Add. $+a+b+c+d$ — S erit, $a+b+c+d = 3S$
Divid. per 3 erit $\frac{a+b+c+d}{3} = S$.

PROBLEMA XIII.

INvenire numerum, qui ſit æqualis quibuſcunque ſuis partibus, & quotcunque + numero aliquo m.

Sit numerus quæſitus x

Erit univerſaliter $x = \frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f}$ &c. $+ m$

& reducendo fractiones ad eandem denominationem, erit $x = \frac{adfx + cbfx + ebdx}{bdf} + m$

& multipl. per bdf erit $bdfx = adfx + cbfx + ebdx + bdfm$

Et transponendo cum ſignis contrariis

Erit $bdfx - adfx - cbfx - ebdx = bdfm$

Et divid. erit $x = \frac{bdfm}{bdf - adf - cbf - ebd}$.

PROBLEMA XIV.

PEtrus ſummam florenorum, quam poſſidet, auget in ratione 4 : 5, hanc ita auctam auget ſecundo in ratione 2 : 3. Hanc auctam porro auget in ratione 6 : 7, ſumma hac ratione aucta tandem fit 10000 flor.

Quæritur ſumma prima.

Sit ſumma quæſita x, ſumma primo aucta ſit y, ſecundo aucta z, erit per conditionem primam

ut: $4 : 5 = x : y$ A

& per ſecundam ut: $2 : 3 = y : z$ B

Per tertiam ut: $6 : 7 = z : 10000$ C

In

In æquatione A multipl. med. & extr. $4y = 5x$

& dividd. per 4 $y = \frac{5x}{4}$

Subſtituendo in B erit $2 : 3 = \frac{5x}{4} : z$

& multipl. med. & extr. $2z = \frac{15x}{4}$

& divid. per 2 erit $z = \frac{15x}{8}$

Subſtituendo in C erit $6 : 7 = \frac{15x}{8} : 10000$

& multipl. med. & extr. $\frac{105x}{8} = 60000$

& multipl. per 8 erit $105x = 480000$

Divid. per 105 fit $x = \frac{480000}{105} = 4571 + \frac{45}{105}$

PROBLEMA XV.

PEtrus & Paulus æquales ſummas impendunt ad lucrum faciendum, Petrus ſua ſumma lucratur 126 flor. Paulus e contra ex ſua ſumma 87 floren. amittit. Summa Petri cum ſuo lucro fit dupla ſummæ Pauli cum ſuo damno. Hoc eſt, ut $2 : 1$.

Summa impenſa utrique communis $= x$

Summa Petri cum ſuo lucro $= x + 126$

Summa Pauli poſt damnum paſſum $x - 87$

Per conditionem probl. $x + 126 : x - 87 = 2 : 1$

Hoc eſt multiplic. $x + 126 = 2x - 174$.

Addendo $- x + 174$ erit $174 + 126 = x$

Hoc eſt $300 = x$

Univerſaliter.

Impendium commune x
Summa primi $= x + a$
Summa ſecundi $= x - b$
Erit per conditionem $x + a : x - b = m : 1$
& multipl. erit $x + a = mx - mb$
& add. $- x + mb$ fiet $a + mb = mx - x$
& divid. per $m - 1$ fit $x = \frac{a + mb}{m - 1}$

PROBLEMA XVI.

PEtrus auget ſuam ſummam florenorum una tertia parte, ex hac aucta expendit floren. 8. Hanc denuo auget una quarta parte, & ex ea expendit fl. 15. Demum auget parte quinta, & expendit flor. 5. Summa tandem hac ratione aucta, & imminuta evadit $=$ 25 flor. Quæritur ſumma prima.

Summa prima quæſita ſit $= x$

Erit per conditionem primam ſumma aucta $x + \frac{1x}{3}$

Hoc eſt reducend. ad eand.denomin. $\frac{3x}{3} + \frac{1x}{3} = \frac{4x}{3}$

Et ſubtrahendo per eandem condit. 8 erit $\frac{4x}{3} - 8$

Per conditionem ſecundam $\frac{4x}{3} - 8 + \left(\frac{4x}{3} - 8\right) : 4$

ſeu $\frac{4x}{3} - 8 + \frac{4x}{12} - \frac{8}{4}$, hoc eſt, $\frac{4x}{3} - 8 + \frac{x}{3} - 2$,

id eſt $\frac{5x}{3} - 10$, & per eandem conditionem ſubtrahendo 15, fiet $\frac{5x}{3} - 25$.

Jam

Jam per conditionem tertiam $\frac{5x}{3} - 25 + \left(\frac{5x}{3} - 25\right) : 5$, ſeu $\frac{5x}{3} - 25 + \frac{5x}{15} - \frac{25}{5}$, hoc eſt $\frac{5x}{3} - 25 + \frac{x}{3} - 5$, id eſt $\frac{6x}{3} - 30$, & per eandem conditionem ſubtrahendo 5 fiet $\frac{6x}{3} - 35$, ſeu brevius $2x - 35$.

Demum cum per conditionem quartam ultima hæc ſumma debeat eſſe æqualis 25, habebitur

$$2x - 35 = 25$$

& add. + 35, erit $2x = 25 + 35 = 60$

& divid. per 2 erit $x = \frac{60}{2} = 30$

PROBLEMA XVII.

Petrus iter aggreſſus intra unum diem conficit milliaria germanica 6, jamque 8 diebus itineratur. Paulus, qui Petrum aſſequi cupit ex eodem loco, & eadem via, intra unum diem conficere ſtatuit milliaria germanica 8, & actu iter ſuum aggreditur.

Quæritur, quot dies Paulus inſumere debeat, ut Petrum aſſequatur.

Tempus quæſitum, quo Paulus Petrum aſſequetur $= x$

Spatium peragratum a Petro, dum Paulus iter aggreditur, eſt per conditionem primam $= 6 \cdot 8 = 48$

Spatium peragrandum a Petro, donec illum Paulus aſſequatur, erit $= 6x$

Spatium peragrandum a Paulo $= 8x$

Quoniam vero Paulus, ut Petrum aſſequatur, tot conficere debet milliaria, quot Petrus, erit ſpatium

tium peragrandum a Paulo æquale ambobus ſpatiis Petri.

Hoc eſt $8x = 6x + 48$

Et add. $- 6x$ erit $2x = 48$

Et divid. per 2, fiet $x = \frac{48}{2} = 24$

Paulus ergo Petrum aſſequitur die 24 ſui diſceſſus.

Univerſaliter.

Unum mobile percurrit ſpatium a tempore 1; & jam a tempore b movetur. Aliud mobile percurrit ſpatium c tempore 1; & incipit moveri verſus eandem plagam.

Quæritur tempus, quo convenient.

Tempus quæſitum x

Spatium peragratum a primo $= ab$

Spatium peragrandum a primo $= ax$

Spatium peragrandum a ſecundo $= cx$

Ergo $ab + ax = cx$

Et add. $- ax$ erit $ab = cx - ax$

Et divid. per $c - a$, fiet $\frac{ab}{c-a} = x$.

PROBLEMA XVIII.

Datis duobus metallis, e. g. auro & argento, datoque valore unius unciæ auri, nempe 8 flor., itemque unius unciæ argenti 4. floren. Ex his duobus componi debet metallum mixtum unciarum 10, hujus conditionis, ut unius unciæ mixtæ valor ſit 6 floren. Quæritur, quot unciæ accipiendæ ſint ex auro, quot ex argento. Unciæ quæſitæ argenti vocentur x.

Un-

Unciæ auri y.

Exprimantur hæ unciæ per ſuos valores in problemate poſitos,

Erit adeo valor unciarum argenti $x = 4x$

Valor unciarum auri $y = 8y$

Valor vero totius metalli mixti ex eodem Problemate habetur, ſi unciæ datæ 10 multipl. per 6, eritque $= 60$

Jam per primam conditionem $x+y = 10$ A

Et per ſecundam $4x+8y = 60$ B

In æquatione A add. $-y$ fiet $x = 10 - y$

Et multipl. per 4 erit $4x = 40 - 4y$.

Subſtituendo in B erit $40 - 4y + 8y = 60$

Seu $40 + 4y = 60$

Add. $- 40$ fiet $4y = 60 - 40 = 20$

Et divid. per 4 habebitur $y = \frac{20}{4} = 5$

Et cum in æquatione A ſit $x = 10 - y$, ſeu $x = 10 - 5$, erit quoque $x = 5$. Igitur tam ex auro, quam ex argento accipiendæ ſunt unciæ 5, ut poſtulatum metallum mixtum obtineatur.

Hujusmodi Problemata vocantur *Mixtionis*, ſive *Alligationis*. Ubi notandum, ſi miſcibilia ſolum bina compoſitionem datam ingrediantur, Problema ſemper fore determinatum, & eodem modo reſolvi, quo iſtud ſolutum eſt; ſi vero plura binis miſcibilia mixtum componere debent, Problema fit indeterminatum, & reſolvitur ut problema primum de indeterminatis ſolvetur.

PROBLEMA XIX.

Datis duobus metallis mixtis, in quorum primo pars auri eſt 1, argenti 2; & in ſecundo partes

tes auri 4, argenti 5; ut fiat maſſa 7, cujus partes auri ſint 3, argenti 4; quæritur, quanta portio ſumenda metalli primi? quanta ſecundi?

Portio primi x

Portio ſecundi y

Quoniam autem partes componentes debent eandem habere rationem, quam compoſita; ſi primum compoſitum 3 continet auri partem 1, & argenti 2; compoſitum x continebit auri $\frac{x}{3}$, argenti $\frac{2x}{3}$, quæ expreſſiones reperiuntur, ex his proportionibus, auri nempe per hanc, $3 : 1 = x$ ad quartum; argenti per hanc $3 : 2 = x$ ad quartum.

Ob eandem rationem ſi ſecundum compoſitum 9 continet auri partes 4, argenti 5; compoſitum y continebit auri $\frac{4y}{9}$, argenti $\frac{5y}{9}$. Quoniam autem ex conditione Problematis auri debent eſſe partes 3, argenti 4, fient duæ æquationes.

$$\frac{x}{3} + \frac{4y}{9} = 3 \qquad A$$

Et $$\frac{2x}{3} + \frac{5y}{9} = 4 \qquad B$$

quæ ſolutæ a fractionibus, quod fit reducendo fractos ad eandem denominationem, & per denominatorem communem utramque æquationis partem multiplicando. Erunt adeo ſolutæ a fractionibus.

$$3x + 4y = 27 \qquad A$$
$$6x + 5y = 36 \qquad B$$

& addendo $-4y$ in æquatione A,

erit $$3x = 27 - 4y$$

& multipl. per 2 fiet $$6x = 54 - 8y$$

Sub-

Subſtituendo in B loco $6x$, erit $54 - 8y + 5y = 36$
Hoc eſt $54 - 3y = 36$
& add. $+ 3y - 36$ erit $54 - 36 = 3y$
Seu $18 = 3y$
& divid. per 3, fiet $\frac{18}{3}$, ſeu $6 = y$

& conſequenter reperitur $x = 1$

Igitur ex mixto, quod 9 partium eſt, accipiendæ ſunt partes 6 ex primo vero, quod eſt partium 3, una ſolum pars ſumenda, ut poſtulatum mixtum novum partium 7 componant.

PROBLEMA XX.

Datis tribus metallis mixtis, quorum primum 12 habeat partes argenti M; 1 æris N, 3 auri O

Ita ut ſit metallum primum compoſitum

Ex	$12\,M + 1\,N + 3\,O$
Secundum	$1\,M + 12\,N + 3\,O$
Tertium	$0\,M + 14\,N + 2\,O$

Ex his componi debet mixtum novum, quod habeat partes $4\,M + 9\,N + 3\,O$

Quæritur, quot partes ex ſingulis datis metallis mixtis ſumi debeant, ut petitum obtineatur?

Pars primi $= x$; ſecundi y; tertii z

Quare pars primi erit	$12\,Mx + Nx + 3\,Ox$
Pars ſecundi	$My + 12\,Ny + 3\,Oy$
Pars tertii	$0\,Mz + 14\,Nz + 2\,Oz$

Comparando ergo terminos ſecundum conditiones Problematis

Erunt partes primi	$12\,Mx + My = 4\,M$,	A
Secundi	$Nx + 12\,Ny + 14\,Nz = 9\,N$	B
Tertii	$3\,Ox + 3\,Oy + 2\,Oz = 3\,O$,	C

Et

Et omittendo literas majuſculas brevitatis gratia, erunt:

Primo $12x + y = 4$ A

Secundo $x + 12y + 14z = 9$ B

Tertio $3x + 3y + 2z = 3$ C

In æquatione A add. $- 12x$, habebitur $y = 4 - 12x$

Subſtituendo talem valorem in B, & C

Erit $14z = 143x - 39$ B

& $2z = 33x - 9$

& multipl. per 7 æquationem C,

Erit $14z = 231x - 63$

Et add. $- 143x + 63$, erit $88x = 24$

Et divid. per 88, erit $x = \frac{24}{88}$, ſeu $\frac{3}{11}$

Conſequenter $y = \frac{8}{11}$, & $z = 0$.

PROBLEMA XXI.

Dato pretio compoſitorum, & ratione componentium, invenire pretium cujuſcunque componentis.

Sit primum compoſitum $3M + 4N = 10$ A

Secundum $5M + 4N = 16$ B

Sitque pretium primum componentis $= x$

Pretium ſecundi $= y$

Subſtituendo pretium loco componentium, erit

$3x + 4y = 10.$ A

& $5x + 6y = 16.$ B

In æquatione A reperitur $x = \frac{10 - 4y}{3}$

& multipl. per 5, fiet $5x = \frac{50 - 20y}{3}$

Sub-

Subſtituendo in B $\frac{50 - 20y}{3} + 6y = 16$

Et fit $y = 1$; conſequenter $x = 2$

SCHOLION.

HUjusmodi Problemata *Mixtionis* probe intellecta viam faciunt ad omnia hujusce generis.

EXEMPLA PRO INDETERMINATIS.

PROBLEMA I.

DAtis tribus metallis, quorum primi uncia ſit 4, ſecundi 6, tertii 9 fl.

Ut componantur unciæ 20, quæ ſingulæ valeant Flor. 7, quot portiones illorum aſſumi debent?

Portio prima x, ſecunda y, tertia z.

Valor portionis primæ $4x$, ſecundæ $6y$, tertiæ $9z$

Quoniam autem unciæ debent eſſe 20

Erit $x + y + z = 20$ A

Et quoniam valor omnium unciarum eſt 20.7 ſeu 140.

Habebitur $4x + 6y + 9z = 140$ B

In Æquatione A $x = 20 - y - z$

Et proinde multipl. per 4 fiet $4x = 80 - 4y - 4z$

Subſtituendo in B

$80 - 4y - 4z + 6y + 9z = 140$. B

Et reperitur $2y = 60 - 5z$

Oportet autem determinare arbitrario z

Si ſit $z = 10$, fiet $y = 5$; $x = 5$

Si ſit $z = 8$, fiet $y = 10$, $x = 2$

SCHOLION.

SI quatuor ſunt miſcibilia, tum determinandæ ſunt duæ quantitates. Si quinque, tres; & ſic procedendo.

PROBLEMA II.

DIſtribuendi ſint floreni 100 hominibus 30, viris nempe fœminis, & pueris, hac conditione: ut vir quilibet percipiat flor. 8, quælibet fœmina 5, ſinguli pueri vero flor. 1.

Quæritur? quot ſint futuri viri, quot fœminæ, & quot pueri?

Vocentur viri x, fœminæ y, pueri z.
Per primam ergo conditionem
Erit $x + y + z = 30.$ A
Et per ſecundam
Habebitur $8x + 5y + z = 100.$ B
In æquatione A reperitur $x = 30 - y - z$
Et multipl. per 8 fiet $8x = 240 - 8y - 8z$
Subſtituendo in B
$240 - 8y - 8z + 5y + z = 100.$
Hoc eſt $240 - 3y - 7z = 100$
Et add. $-$ 100, fiet $140 - 3y - 7z = 0$
Add. $+ 7z$ erit $140 - 3y = 7z$
Si y ſit 7 erit $z = 17$; $x = 6$
Si y ſit 14 erit $z = 14$; $x = 2$ quod variis modis ſolvi poteſt.

PROBLEMA III.

AUreis 40 emuntur 40 feræ trium ſpecierum nempe cervi, damulæ, & lepores; ſinguli cervorum veneunt aureis tribus, ſingulæ damulæ aureo uno, lepores vero ſinguli $\frac{1}{12}$ aurei.

Quæritur quot empti fuerint cervi, quot damulæ, & quot lepores.

Sit

Sit Numerus cervorum $= x$, damularum $= y$, leporum $= z$.

Erit Numerus ferarum omnium per condit. prim.

$$x + y + z = 40. \qquad A$$

Et per conditionem ſecundam pretium omnium.

$$3x + y + \frac{z}{12} = 40. \qquad B$$

In æquatione A $x = 40 - y - z$

Et multipl. per 3 fiet $3x = 120 - 3y - 3z$

Subſtituendo in B loco $3x$

Erit $120 - 3y - 3z + y + \frac{z}{12} = 40$

Seu $120 - 2y - 3z + \frac{z}{12} = 40$

Et mult. per 12 erit, $1440 - 24y - 35z = 480$

Et add. $- 480 + 35z$ erit $960 - 24y = 35z$

Quare ſi y ponatur $= 5$ erit $z = 24$, & $x = 11$.

PROBLEMA IV.

DAtis duobus numeris 7 & 20 alios duos invenire, ut primus multiplicatus per 20 ſit æqualis producto numeri ſecundi per 7, plus 200

Numerus primus x, ſecundus y

Ergo $20x = 7y + 200$.

Sit $y = 10$, & erit $x = \frac{27}{2}$

Sed ſi quærantur integri, ad quod aliquo artificio opus eſt, tum

Fiat $7y = 20x - 200$

Et erit $y = \frac{20x}{7} - \frac{200}{7}$

Nempe reſolvendo in integra

$$y = 2x + \frac{6x}{7}\ 28 - \frac{4}{7}$$

Cum $2x$ & 28 ſint numeri integri, ſi fractiones

$\frac{6x}{7} - \frac{4}{7}$ conficiunt integrum,

Tum quoque y erit numerus integer.

Ponatur ergo $\frac{6x}{7} - \frac{4}{7} = m$

Et erit $6x - 4 = 7m$

Quare $x = \frac{7m}{6} + \frac{4}{6}$

Nempe reſolvendo in integra $x = m + \frac{m}{6} + \frac{4}{6}$

Ponantur fractiones $\frac{m}{6} + \frac{4}{6} = 1$

Et reperitur $m = 2$

Ex quo fit $x = 3$; $y = -20$

Quoniam autem y ſit negativus

Ponantur fractiones $\frac{m}{6} + \frac{4}{6} = 4$

Et ſit $m = 20$

Ex quo ſit $x = 24$; y 40.

Et tales ſunt numeri quæſiti.

SCHOLION.

HÆc methodus univerſalis eſt pro quæſtionibus indeterminatis, ut habeantur numeri integri; & in eo poſita eſt, ut fiat diviſio, donec reſiduum ſit æquale integro.

SECTIO III.
DE SERIEBUS, ET DE EORUM SUMMIS.

Definitiones.

I. SI ſint plures quantitates, quæ cum certa lege progrediantur, *Seriem* efformant, quæ vel *finita* eſt, vel *infinita*. *Finita* dicitur, cum in aliquo termino progreſſio ſiſtit. *Infinita*, ſi concipiatur progreſſio continuari in infinitum.

II. Cum quantitates continuo creſcunt, Series dicitur *creſcens*, cum minuuntur, *decreſcens*.

Quemadmodum infinitæ Leges excogitari poſſunt ſecundum quas quantitates progrediantur, ita infinitæ poſſunt dari ſpecies Serierum. Ex his magis præcipuas, & utiliores ſubjiciemus, præmiſſis quibusdam Lemmatis de infinito.

LEMMATA.

1. SI ſit ſeries numerorum naturalium creſcens
$1, 2, 3, 4, 5 \dots \dots \dots n$
ultimus terminus n erit infinitus.

2. Si fiant quadrata horum numerorum
$1, 4, 9, 16, 25, 64 \dots \dots nn$
ultimus terminus erit nn, qui eſt infiniti infinitus, ſeu *infinitus ſecundi ordinis*.

3. Si fiant cubi, ultimus terminus erit n^3, nempe infinitus tertii ordinis. Ita concipi poſſunt infinita quarti, quinti ordinis in infinitum.

4. Si ſit ſeries decreſcens, ut

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \ldots \frac{1}{n}$$

ultimus terminus erit $\frac{1}{n}$ qui dicitur *infiniteſimus.*

5. Si fiant quadrata horum numerorum ultimus terminus erit $\frac{1}{nn}$; nempe infiniteſimus ſecundi ordinis.

6. Si fiant cubi, erit $\frac{1}{n^3}$ nempe infiniteſimus tertii ordinis. Ita concipi poſſunt infiniteſima quarti, quinti in infinitum,

7. Eadem ratio, quæ intercedit inter finitum, & primi ordinis infinitum, intercedit inter infinitum primi ordinis, & infinitum ſecundi.

8. Et quæ ratio intercedit inter infinitum primi ordinis, & finitum, eadem eſt inter finitum, & infiniteſimum primi ordinis.

9. Finitum multiplicatum per infinitum primi ordinis dat infinitum primi ordinis. Ut ſi a ſupponatur quantitas finita, n infinita primi ordinis, an erit infinita primi ordinis.

10. Multiplicando infinitum primum per primum ut n per n, fit nn nempe infinitum ſecundum.

11. Multiplicando primum n per ſecundum nn, fit n^3 nempe tertium.

12. Di-

12. Dividendo infinitum primum per infinitum primum fit finitum. Sic $\frac{n}{n} = 1$

13. Dividendo infinitum primum per ſecundum, fit infiniteſimum primum. Ut $\frac{n}{nn} = \frac{1}{n}$

14. Multiplicando infiniteſimum primum per infiniteſimum primum, fit infiniteſimum ſecundum. Ita $\frac{1}{n}$ multiplicatum per $\frac{1}{n}$ dat $\frac{1}{nn}$

15. Dividendo infiniteſimum primum per infiniteſimum primum, fit finitum. Ita $\frac{1}{n} : \frac{1}{n} = 1$

16. Dividendo infiniteſimum primum per ſecundum, fit infinitum. Sic $\frac{1}{n} : \frac{1}{nn} = n$

AXIOMATA.

1. Quantitas finita reſpectu ſuæ infinitæ tantæ parvitatis eſt, ut pro nulla haberi poſſit, hoc eſt, tute negligi poteſt.

Sit $S = a + n$; ſitque a finita, n vero infinita, erit $S = n$.

2. Infinitum primi ordinis reſpectu infiniti ſecundi ordinis adſumi poteſt pro finito, hoc eſt, evaneſcit.

Sit $S = n + nn$, erit $S = nn$,

3. Quantitas infiniteſima reſpectu finitæ, cujus eſt infiniteſima, pariter evaneſcit,

Sit $S = a + \frac{a}{n}$ erit $S = a$.

Hinc infinitum non mutatur, ſeu addatur illius infiniteſima, ſeu ab eo auferatur.

Nota has formulas non eſſe proprie *æquationes*, ſed ſolum *adæquationes*, literam vero S ſignificare ſummam, qua etiam expreſſione ſummæ in ſubſequentibus utemur.

CAPUT I.

De Serie Arithmetica.

NUmerus indefinitus terminorum vel creſcentium, vel decreſcentium per æquales differentias, dicitur Series *Arithmetica*, ut A, vel B.

A 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .

A 4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3. . .

Si primus terminus dicatur a, & differentia d, quælibet ſeries Arithmetica exprimetur per hanc formulam univerſalem.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d, a+7d, a+8d,$

Si termini hujus feriei Arithmeticæ attentius conſiderentur, patebit terminos quoſcunque continere primum cum totidem differentiis, quot ſunt termini præcedentes. Sic tertius eſt $a + 2d$, quartus $a + 3d$ &c.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

QUæcunque ſit Series Arithmetica, ſi addatur primus terminus, & ultimus; ſecundus, & penultimus, tertius cum antepenultimo, & ſic proſequendo erunt ſemper æquales ſummæ. Sic

Primus & ultimus	$= 2a + 8d$
Secundus, & penultimus	$= 2a + 8d$
Tertius & ſeptimus	$= 2a + 8d$
Quartus & ſextus	$= 2a + 8d$
Quintus & quintus	$= 2a + 8d$

COROL-

COROLLARIUM I.

QUare, ut habeatur omnium terminorum ſumma, addantur duo extremi; & multiplicetur eorum ſumma per dimidium numeri terminorum.

Ita ſi ſint octo termini

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

ut habeatur illorum ſumma, multiplicetur $15 + 1$, hoc eſt 16, quæ eſt ſumma extremorum, per 4; dimidium nempe de 8, erit productum 64, ſumma quæſita.

Et univerſaliter ſi terminus primus dicatur a, ultimus u, ſumma quæſita S, & numerus terminorum n erit formula generalis ſummæ, cujuſcunque Arithmeticæ, $S = (a + u). \frac{n}{2}$;

COROLLARIUM. II.

HInc ſi numerus terminorum eſt infinitus, ſumma quoque terminorum erit infinita.

COROLLARIUM III.

SI terminus ultimus u eſt infinitus, formula prior $S = (a + u). \frac{n}{2}$ tranſibit in hanc; $S = \frac{nu}{2}$ evaneſcente nimirum quantitate finita a,

Et ſi ſeries ſit decreſcens, erit u infiniteſima, hoc eſt, evaneſcet, conſequenter erit; $S = \frac{an.}{2}$

PROBLEMA I.

DAto primo & ultimo termino, & numero terminorum, invenire differentiam.

 Sit

Sit primus terminus 1, ultimus 23, numerus terminorum 12, & quæratur differentia d.

Erit ultimus terminus per conſtitutionem primam ſeriei Arithmeticæ, $1 + 11d$. Sed ex hypotheſi æquatur 23.

Quare $1 + 11d = 23$; & fit $d = 2$.

Univerſaliter.

Sit terminus primus $= a$, ultimus $= u$ numerus terminorum $= n$ differentia quæſita $= x$

Erit per proprietatem ſeriei Arithmeticæ terminus ultimus

$a + (n - 1).\ x = u$, hoc eſt $a + nx - x = u$, & reperitur $x = \frac{u - a}{n - 1}$

PROBLEMA II.

Dato ultimo termino 23, primo 1, & differentia 2 invenire numerum terminorum.

Sit ille x; Quare ultimus terminus eſt

$1 + (x - 1).\ 2 = 23$, hoc eſt $1 + 2x - 2 = 23$

Et fit $x = 12$

Univerſaliter.

Sit numerus terminorum x, & differentia d reliquis manentibus, ut in priore Problemate.

Erit ultimus terminus $a + (x - 1).\ d = u$

Hoc eſt $a + dx - d = u$

Et fit $x = \frac{u - a + d}{d}$

PRO-

PROBLEMA III.

DAto primo termino 1, & differentia 2, invenire terminum centeſimum. Sit ille x. Et quoniam ille eſt(*) $1 + (99).2$, erit $x = 1 + (99).2. = 199$
Eadem methodo quilibet alius invenitur.

PROBLEMA IV.

DIfferentia eſt 2, numerus terminorum 12, ultimus 23, invenire primum
Sit ille x
Quoniam ultimus eſt $x + (12 - 1).2$ ſeu $x + 22$
Erit ex hypotheſi $x + 22 = 23$
Et ſit $x = 1$

Univerſaliter.

Sit terminus primus quæſitus $= x$, manentibus omnibus, ut prius, erit terminus ultimus
$u = x + (n - 1).d$, ſeu $u = x + nd - d$
Et ſit $x = u + d - nd$

PROBLEMA V.

PRimus terminus eſt 1; ultimus 23, numerus terminorum 12, invenire ſummam. Sit ſumma S; & quoniam per Coroll. 1. hujus capitis ſit
$$S = (a + u).\frac{n}{2}$$
Erit $S = (1 + 23).6 = 144$.

PROBLEMA VI.

NUmerus terminorum eſt 12, primus 1; ſumma omnium 144 invenire differentiam.

Diffe-

(*) *Ut ex formula generali initio hujus capitis allata patet.*

Differentia quæſita x
& quoniam ultimus terminus eſt $1 + 11x$; erit $(1 + 1 + 11x).\,6 = 144$.
Et fit $x = 2$.

Univerſaliter.

Sit differentia quæſita $= x$
Erit terminus ultimus $a + (n - 1).\,x$, ſeu $a + nx - x$
Conſequenter per Coroll. prim. hujus ſumma $S = (a + a + nx - x).\,\frac{n}{2}$, ſeu $S = \frac{2an + nnx - nx}{2}$

Et fit $x = \frac{2S - 2an}{nn - n}$

CAPUT II.

De Serie Geometrica.

SI plures quantitates progrediantur in continua proportione Geometrica, dicitur *Series Geometrica*: quæ eſt *Creſcens*, ut A, vel *Decreſcens* ut B

A $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,$ &c.
B $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$

Si primus terminus dicatur a, & exponens rationis dicatur m, quæcunque Series Geometrica per hanc Seriem generalem repræſentabitur.

$a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a.\ m^6a.\ \ldots$

Ex qua colligitur, quemcunque terminum æquari producto primi in poteſtatem exponentis, ejus gradus, qui reſpondet numero terminorum præcedentium. Ita terminus quartus eſt m^3a, quintus m^4a &c.
Idem

Idem patet in progreſſione decreſcente :

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{mb},\ \frac{a}{m^2 b},\ \frac{a}{m^3 b},\ \frac{a}{m^4 b}. \ \ldots$$

THEOREMA FUNDAMENTALE.

Datis quotlibet terminis in Geometrica Serie datur ſemper hæc proportio, ut terminus primus eſt ad ſecundum, ita ſumma omnium præter ultimum ad ſummam omnium præter primum.

Sit enim Series $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$

Seu per Seriem generalem expreſſam per exponentes

$$a,\ ma,\ m^2a,\ m^3a,\ m^4a,\ m^5a,\ m^6a \ldots$$

Igitur $a : ma = a + ma + m^2a, m^3a, m^4a, + m^5a : ma + m^2a + m^3a + m^4a + m^5a + m^6a$.

Seu $a : b = a + b + c + d + e + f : b + c + d + e + f + g$.

Quod erat propoſitum.

Eadem eſt demonſtratio Seriei decreſcentis.

PROBLEMA I.

Datis quotlibet terminis in Serie Geometrica, invenire eorum ſummam.

Si primus dicatur a, ſecundus b, ultimus u, & ſumma quæſita x; erit per Theorema antecedens hæc proportio $a : b = x - u : x - a$.

Et fit $$x = \frac{bu - aa}{b - a}$$

Igitur, ut habeatur ſumma omnium Seriei creſcentis; ex producto ſecundi in ultimum tollatur quadratum pri-

primi, & reſiduum dividatur per differentium ſecundi a primo. Ita ſi detur Series
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. erit ſumma
(2. 512) — 1, ſeu 1024 — 1 = 1023

Si vero ſit Series decreſcens, ſumma omnium habetur, ſi a quadrato primi auferatur productum ſecundi in ultimum, & reſiduum dividatur, per differentiam, primi a ſecundo. Ita ſi ſit ſeries decreſcens.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

Erit ſumma

$$\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right):\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\text{ ſeu }\frac{31}{32}:\frac{1}{2}\text{ quod eſt }=\frac{62}{32}$$

Et univerſaliter formula Seriei creſcentis $x = \frac{bu - aa}{b - a}$ tranſibit in hanc $x = \frac{aa - bu}{a - b}$, quæ eſt Seriei, decreſcentis. Quia nempe in Serie decreſcente terminus primus a eſt maximus omnium, conſequenter quadratum primi etiam majus eſt quam productum ſecundi in ultimum.

COROLLARIUM. I.

SI Series eſt infinita, & creſcens, ultimus terminus u eſt infinitus & ſumma conſequenter infinita, quare in formula priore Seriei creſcentis terminus aa evaneſcit; fitque $x = \frac{bu}{b - a}$

COROLLARIUM II.

Si Series eſt infinita decreſcens tum terminus ultimus eſt infiniteſimus. Quare bu evaneſcit in formula Seriei decreſcentis, fitque $x = \frac{aa}{a - b}$

nem-

nempe ſumma omnium æquatur quadrato primi termini per differentiam primi & ſecundi diviſo.

Ita ſi detur Series $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ in infinitum; ſumma infinitarum hujusmodi fractionum erit $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} = 2$

Et ſit altera Series

$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots$

Summa infinitarum hujusmodi fractionum erit

$\frac{1}{1} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$

Et alterius Seriei

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\ldots$

Summa erit $\frac{1}{1} : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

Hinc habetur methodus comparandi duas Series inter ſe licet infinitas; & earum rationem in terminis finitis determinandi.

PROBLEMA II.

Dato primo termino, & exponente invenire quemlibet Seriei Geometricæ terminum.

Sit primus terminus 3, exponens 2, & quæratur centeſimus terminus.

Quoniam ergo terminus centeſimus eſt productum 3 primi in poteſtatem 99 exponentis (*) multipli-

(*) *Per ea, quæ principio Capitis* II. *hujus dicta ſunt.*

tiplicetur 3 per 2 elevatum ad poteſtatem 99; & habebitur terminus centeſimus.

PROBLEMA III.

DAto primo termino 70, & numero terminorum 10; & termino ultimo 35840. Invenire exponentem Seriei. Vocetur is x.

Quoniam ultimus terminus eſt (*)

$x^9 \cdot 70$, ſeu $70\, x^9 = 35840$; erit $x^9 = 512$

Quare extracta radice nona de 512 erit $x = 2$

PROBLEMA IV.

PRimus terminus eſt 70, ultimus eſt 35840, exponens 2, invenire numerum terminorum x

Erit in hoc caſu (**) $70 \cdot 2^x = 35840$

Quare $2^x = 512$

Poteſtas ergo numeri 2, cujus numerus ſit = 512 determinabit numerum terminorum præcedentium, qui in hoc caſu reperiuntur eſſe novem.

PROBLEMA V.

DAtis duabus quantitatibus a, & b invenire quotlibet medias proportionales continuas.

Sit primo invenienda una media proportionalis x

Erit $a : x = x : b$

Quare $x\,x = ab$, & $x = \sqrt{a\,b}$,

Ut Corol. 3 Theor. 1 Sect. reperta eſt.

Sint

(*) *Per idem Caput* II. *hujus.*

(**) *Per idem Caput* II. *hujus.*

Sint ſecundo inveniendæ duæ mediæ proportionales x, & z

Erit Series $a : x : z : b$

Et quoniam, ut prima ad quartam, ita cubus primæ ad ſecundæ cubum (*) erit $a : b = a^3 : x^3$

Quare $x^3 = a^2 b$

Et ſit $x = \sqrt[3]{aab}$

Series ergo ſit $a : \sqrt[3]{aab} : z : b$

Et cum z ſit media proportionalis inter $\sqrt[3]{aab}$, & b erit $\sqrt[3]{aab} : z = z : b$

Fietque $zz = b\sqrt[3]{aab}$, ſeu $= \sqrt[3]{aab^4}$, ſeu $= (aab^4)^{\frac{1}{3}}$

Extrahendo radicem quadratam

Erit $z = abb^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abb}$

Sint tertio inveniendæ tres x, y, z; & erit Series $a : x : y : z : b$.

Et eadem methodo reperietur (**) prima mediarum $\sqrt[4]{a^3 b}$ ſecunda. $\sqrt[4]{aabb}$; tertia. $\sqrt[4]{ab^3}$

DE SERIEBUS FIGURATORUM.

CAPUT III.

SIt Series unitatum quotcunque, ut in figura ſub Numero I. ex hac Serie fiant aliæ quædam, quibus tot zeri præfigantur quoto ordine Seriem uni-

 ta-

(*) *Per Theor. 3. cap. 4. Sect. 2.*

(**) *Per Theor. 3. cap. 4. Sect. 2.*

tatum conſequuntur. Sic Seriei II. ſeu primæ a Serie unitatum præponendus eſt zerus unus. Seriei III. quæ ſecunda eſt ab unitatibus zeri duo. Seriei VI. zeri tres, & ſic porro. Zeros hoſce in qualibet dictarum Serierum ſequitur unitas, reliqui vero numeri cujuslibet Seriei habentur ex additione numerorum Seriei præcedentis uno termino ſuperiorum.

Sic in Serie II. numerus 2, eſt ſumma primæ, & ſecundæ unitatis Seriei præcedentis, ſeu unitatum; ut in figura ex areolis lineis expletis liquet. Sic numerus 3. ejusdem Seriei II. eſt ſumma unitatis primæ, ſecundæ, & tertiæ Seriei præcedentis; idem eſt de aliis Seriei II. terminis.

Si quoque in Serie III. numerus 3 eſt ſumma numerorum 1, & 2 Seriei II. præcedentis, numerus 6 ejusdem Seriei, eſt ſumma numerorum 1, 2, & 3 Seriei II. & ſic de aliis terminis.

Eodem modo numeri reliquarum Serierum ſunt ſummæ numerorum uno termino ſuperiorum Seriei præcedentis; ut ex ſubjecta figura liquet:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Unitates generatrices.	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	2	1	0	0	0	0	0
	1	3	3	1	0	0	0	0
	1	4	6	4	1	0	0	0
	1	5	10	10	5	1	0	0
	1	6	15	20	15	6	1	0
	1	7	21	35	35	21	7	1

Numeri harum Serierum dicuntur *figurati*, quia cujuslibet Seriei numerus in figuram ſibi cognominem diſponi poteſt; & prima quidem Series eſt *unitatum*, ſecun-

ſecunda numerorum *naturalium*, tertia *trigonalium*, quarta *piramidalium*, quinta *triangulopiramidalium*, ſexta *piramidopiramidalium*, &c.

In hujuſcemodi numeris infinitæ continentur proprietates, quæ partem nobiliorem, & præclariorem Arithmeticæ conſtituunt. Nos fundamentales notabimus a quibus cæteræ omnes dependent.

1. Et primo illud obſervandum venit, quod ſeriebus ita conſtructis, tot zeri in qualibet ſerie inveniuntur, quot ſunt ſeries, quæ ipſam præcedunt. Ita in ſecunda unus eſt zerus, in tertia duo, in quarta tres, & ſic procedendo.

2. Quilibet numerus cujuſlibet ſeriei æquatur ſummæ omnium numerorum ſeriei præcedentis ſuperiorum. Ita in ſerie tertia triangularis 10 æquatur ſummæ omnium naturalium ſuperiorum 1,2,3,4. Et in ſerie quarta pyramidalis 35 æquatur ſummæ omnium ſuperiorum triangularium, & in ſexta Pyramydopyramidalis æquatur ſummæ omnium ſuperiorum triangulopyramidalium.

3. In quacunque ſerie ſumma terminorum omnium, ad ſummam totidem terminorum ultimo æqualium (incipiendo a zeris) habet eam rationem quam unitas ad exponentem ſeriei. (*)

Sic primæ ſeriei ſumma quinque terminorum ad terminum ultimum multiplicatum per 5 eſt ut 1 : 1 In ſecunda ut 1 : 2; in tertia ut 1 : 3, & ſic procedendo; ſeu in prima ſerie ſumma terminorum quinque, eſt æqualis ſummæ, ex multiplicatione termini ultimi per 5 ortæ; In ſecunda ſerie eſt ſubdupla, in tertia ſubtripla &c. Atque hinc

L 2 4. Sum-

(*) *Videatur demonſtratio hujus proprietatis in Arte conjectandi Jacobi Bernoulli P. 2. C. 3.*

4. Summa terminorum omnium ſeriei datæ, eſt æqualis ſummæ totidem terminorum ultimo æqualium (incipiendo a zeris) diviſæ per exponentem ſeriei datæ; hoc eſt ſeriei primæ diviſor eſt 1, ſecundæ 2, tertiæ 3 &c.

Ex quibus proprietatibus exurgit Methodus determinandi ſummas quotlibet terminorum in quacunque hujusmodi ſerie, quam nunc exponemus.

Data qualibet Serie figuratorum invenire quotlibet terminorum ſummam.

Sit primo loco determinanda ſumma numerorum naturalium, quorum numerus eſt n (incipiendo ab unitate.) Cumque ultimus hujus ſeriei terminus per ſecundam proprietatem ſit n, & numerus terminorum, ſi fiat principium a zero, ſit $n + 1$, erit per tertiam proprietatem ſumma omnium ad ſummam totidem ultimo æqualium, hoc eſt productum numeri n per $n + 1$ ut $1 : 2$ Hoc eſt, per proprietatem quartam æqualis $\frac{n.\,n + 1}{1.\,2}$, ſi ergo ſumma dicatur S,

erit $S = \frac{n.\,n + 1}{1.\,2}$

Sit ſecundo loco determinanda ſumma numerorum triangularium. Et quoniam ultimus terminus æquatur omnibus præcedentis ſeriei, uno gradu ſuperioribus; per proprietatem ſecundam. Si numerus triangularium addendorum ſit n; erit ultimus $= \frac{n.\,n + 1}{1.\,2}$. Sed numerus terminorum (incipiendo a zeris) eſt $n + 2$. Cum ergo ſumma omnium (per tertiam proprietatem) ad productum ultimi per numerum

Digitized by Google

merum terminorum, ſit, ut 1 : 3, erit per proprietatem quartam $S = \frac{n.\ n+1.\ n+2}{1.\quad 2.\quad 3}$

Eadem methodo pro Piramidalibus

Fit $S = \frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n+3}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$

Et pro quacunque ſerie, cujus exponens eſt e in infinitum

erit $S = \frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n+3 \ldots n+e-1}{1.\ 2.\quad 3.\quad 4.\quad e}$

Qua formula poſita ſummæ quorumlibet Figuratorum cujuſcunque ſpeciei habentur.

Sit enim exempli gratia quærenda ſumma ſex triangularium; Et quoniam n in hac hypotheſi eſt 6, & exponens ſeriei $= 3$.

Erit $S = \frac{n.\ n+1.\ n+2}{1.\quad 2.\quad 3.}$

Nempe $= \frac{6.\ 7.\ 8}{1.\ 2.\ 3.} = 56$

Si quæratur ſumma decem pyramidalium; tum $n = 10$ & exponens ſeriei $= 4$.

Ergo $S = \frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n.+3}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}$

Nempe $= \frac{10.\ 11.\ 12.\ 13.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 715.$

SCHOLION.

Quodſi numerus n denotet numerum terminorum datæ Seriei non ab unitatibus incipientem, ſed a zeris, tum, ut eadem methodo reperiri queat ſum-

ma figuratorum; ab n tot unitates ſubtrahendæ erunt qnot zeri in data qualibet ſerie reperiuntur. Ita ſi ſex dentur termini incipiendo ab unitatibus in ſerie ſecunda, erunt hi quinque ſi incipiatur a zeris, in ſerie tertia quatuor, in quarta tres &c.

Colligendo ergo in unam ſummam terminos incipientes a zeris, numerus terminorum n in ſerie prima manet, cum nullum zerum habet, ſed in ſecunda fit $n - 1$, in tertia $n - 2$, in quarta $n - 3$ &c.

Et prior $\frac{n}{1} . \frac{n+1}{2} . \frac{n+2}{3} . \frac{n+3}{4}$ &c. abit in hanc

$$\frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{-3 . n}{4} \ldots \frac{-4 \ldots n - c + 1}{5 \ldots c} .\&c.$$

CAPUT IV.

De Seriebus Poteſtatum.

Cum per ſeries Poteſtatum intelligantur ſeries numerorum, qui ſint poteſtates ſeriei numerorum naturalium, e. g poteſtates ſecundæ, ſeu quadrata, eadem illæ methodo colliguntur in unam ſummam, qua capite præcedente numeros figuratos collegimus.

Sit e. g. determinanda ſumma ſeriei poteſtatum primarum, ſeu radicum.

1, 2, 3, 4, 5, 6, - - - - &c.

Cum ſeries hæc ſit ſeries numerorum naturalium, ſi numerus terminorum dicatur n erit per caput præcedens ſumma horum terminorum, ſeu $Sn = \frac{n}{1} . \frac{n+1}{2}$, hoc eſt $\frac{nn+n}{2}$

Sit

Sit ſecundo determinanda ſumma ſeriei poteſtatum ſecundarum, ſeu quadratorum e g.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 - - - &c.

Cumque per caput præcedens terminus n Seriei III. ſit æqualis ſummæ terminorum n Seriei II. uno termino ſuperiorum, erit is $\frac{nn + n}{2}$, & conſequenter ſumma horum terminorum nempe $\frac{Snn + Sn}{2}$ erit per idem caput $= \frac{nn + n}{2.} \cdot \frac{n + 2}{3.}$, hoc eſt $\frac{Snn + Sn}{2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, ſeu brevius $\frac{Snn + Sn}{2} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$,

Et multipl. per 2 erit $Snn + Sn = \frac{2n^3}{6} + \frac{2n^2}{2} + \frac{2n}{3}$ hoc eſt $Snn + Sn = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3}$.

Et add. $-$ Sn erit $Snn = \frac{n}{3} + n^2 + \frac{2n}{3} - Sn$ ſubſtituendo loco Sn valorem prius inventum nempe $\frac{nn + n}{2}$ ſeu $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, ſimulque reducendo; erit: $Snn = \frac{n^3}{3} + \frac{2n^2}{2} - \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{6} - \frac{3n}{6}$ hoc eſt: $Snn = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Sit tertio colligenda ſumma, terminorum poteſtatis tertiæ, ſeu cuborum; & cum eadem methodo terminus n, Seriei IV. ſit æqualis ſummæ terminorum Seriei III. termino uno ſuperiorum, per caput præcedens; erit is æqualis ſummæ paullo ante repertæ nempe $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, & conſequenter ſumma terminorum omnium, nempe $\frac{Sn^3 + 3Sn^2 + 2Sn}{6}$ erit per idem caput præcedens æqualis $\frac{(n^3 + 3n^2 + 2n)}{6}$. $\frac{(n+3)}{4}$ hoc eſt $\frac{Sn^3 + 3Sn^2 + 2Sn}{6} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24}$.

Multipl. per 6 erit $Sn^3 + 3Sn^2 + 2Sn = \frac{6n^4 + 36n^3 + 66n^2 + 36n}{24}$. & ſubſtituendo loco Snn, & Sn, valores jam ſupra repertos, ac ſubtrahendo, reperietur

$$Sn^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

Eadem methodo habentur ſummæ quarumlibet poteſtatum, ut ex ſubjecta figura liquet.

Summa numerorum naturalium $Sn = \frac{nn}{2} + \frac{n}{2}$

Summa quadratorum $Sn^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$

Summa cuborum $Sn^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{nn}{4}$

Sum-

Summa quadratoquadratorum $Sn^4 =$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Super ſolidorum $Sn^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{nn}{12}$

Quadratocuborum $Sn^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$

CAPUT V.

De Seriebus Hypſiclis.

1. SEries Hypſiclis ab Inventore Hypſicle ſic dictæ, ſunt Series quædam numerorum figuratorum ab unitate incipientium, & ex continua additione Serierum Arithmeticarum productorum. Et quidem

Primo: ſi Series Arithmetica ſit hujusmodi, ut terminorum differentia ſit nulla, & ab unitate incipiat, hoc eſt, ſi quilibet terminus ſit unitas; ex continua harum unitatum additione naſcetur Series numerorum naturalium incipiens ab unitate.

Secundo: ſi ſit Series Arithmetica incipiens ab unitate, cujus termini unitate differant; ex horum terminorum continua additione exurget Series numerorum triangularium incipiens ab unitate.

Si differentia Seriei Arithmeticæ ſit 2; ex horum terminorum additione producetur Series quadratorum. Si differentia 3, exurgent pentagoni; ſi 4 Hexagoni; & ita porro. Ut in ſubjecta figura.

Series Arithmetica	1.	1.	1.	1.	1.	1.
Series Naturalium	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Series Arithmetica	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Series Trigonalium	1.	3.	6.	10.	15.	21.
Series Arithmetica	1.	3.	5.	7.	9.	11.
Series Quadratorum	1.	4.	9.	16.	25.	36.
Series Arithmetica	1.	4.	7.	10.	13.	16.
Series Pentagonorum	1.	5.	12.	22.	35.	51.
Series Arithmetica	1.	5.	9.	13.	17.	21.
Series Hexagonorum	1.	6.	15.	28.	45.	66.

Vocantur autem hi numeri *Polygoni*, ſeu ſpeciatim triangulares, quadrati &c. propter analogiam, quam ad figuras cognomines dicunt. Quod ſi enim capiantur tot unitates globulorum, aut aliarum rerum, quot datus dati numeri ſingularis terminus unitates continet, eæ in figuram cognominem diſponi poſſunt, neque in ullam aliam diſponi poterunt.

2. *Latus Polygoni* vocatur numerus terminorum, quotus nempe is ſit terminus in Serie data figurata.

3. *Numerus Angularis* eſt exponens dati polygoni, ſeu eſt numerus indicans ſpeciem Seriei figuratæ. Sic e. g. 3 eſt exponens Seriei triangularium, 4 quadratorum, 5 pentagonorum &c. & univerſaliter numerus angularis ſemper ſuperat binario differentiam, quæ intercedit inter terminos ſuæ Seriei Arithmeticæ generatricis.

PROBLEMA I.

Dato latere, & numero angulari determinare numerum Polygonum.

SI latus $= n$
Numerus angularis $= a$

Pri-

Primus terminus Seriei generatricis, qui ſemper eſt idem $= 1$.

Differentia terminorum *per Num. 3.* paulo ante dictum $= a - 2$.

Et quoniam ultimus terminus Seriei cujuslibet Arithmeticæ æquatur primo + producto differentiæ in numerum terminorum præcedentium (*)

Erit $= 1 + (n - 1).(a - 2)$

Summa primi & ultimi $= 2 + (n - 1).(a - 2)$

Multiplicando hanc ſummam per ſemiſſem terminorum habetur eorum ſumma, quæ erit

$$\frac{n^2.(a-2) \;-n.\;(a-4)}{2}$$

Jam, cum quilibet Polygonus æquetur ſummæ terminorum ſuæ Seriei generatricis. Ergo Polygonus quilibet exprimetur per hanc formulam generalem $\frac{n^2.\;(a-2)-n.\;(a-4)}{2}$, ex hac autem formula univerſali determinantur formulæ particulares pro quolibet polygono, ſubſtituendo loco a numerum angularem.

Nam ſi $a = 3$; erit quilibet triangularis $= \frac{nn+n}{2}$

Si $a = 4$, quilibet quadratus $= \frac{2nn - 0n}{2}$

Si $a = 5$, quilibet pentagonus $= \frac{3nn - n}{2}$

Si $a = 6$, quilibet Hexagonus $= \frac{4nn - 2n}{2}$

PRO.

(*) *Sectione III. cap. I.*

PROBLEMA II.

Invenire ſummam quotcunque terminorum cujuslibet Seriei Polygonæ.

CUm quilibetterminus, ſeu numerus Polygonus = $\frac{n^2\,(a-2)-n.(a-4)}{2}$

erit omnium polygonorum ſumma

$$\frac{S\,nn.\,(a-2)-Sn.\,(a-4)}{2}$$

Subſtituendo loco Snn, & Sn earum valores, quos ſupra Capite IV. invenimus, fiet ſumma omnium polygonorum pro quacunque Serie.

$$\frac{n^3\,(a-2)+3nn+(a-5).-n}{6}$$

ex qua formula univerſali formantur particulares, determinando nempe numerum a, ut in priore problemate factum, eruntque formulæ ſummarum particulares, ut ex ſubjectis liquet:

Pro Trigonalibus $\frac{n^3+3nn+2n}{6}$

Pro Quadratis $\frac{2n^3+3nn+n}{6}$

Pro Pentagonis $\frac{3n^3+3nn}{6}$

Pro

Pro Hexagonis $\frac{4n^3 + 3nn - n}{6}$

Pro Heptagonis $\frac{5n^3 + 3nn - 2n}{6}$

Hæ formulæ haud difficulter continuantur, modo obſervetur lex, qua conſtanter procedunt.

CAPUT V.

De Seriebus Compoſitis.

Series Compoſita dicitur Series fractionum, quarum denominatores diverſa lege a ſuis numeratoribus progrediuntur e. g. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$ - - &c. in qua numeratores legem Seriei Arithmeticæ, denominatores vero Seriei Geometricæ tenent.

LEMMA I.

Sit Series fractionum infinita

$$\frac{a.\ a+c,\ a+2c,\ a+3c\ \ldots}{b,\ b+d,\ b+2d,\ b+3d}$$

cujus tam numeratores, quam denominatores procedunt Arithmetice, dico, terminum ultimum hujus Seriei fore fractionem $\frac{c}{d}$ nimirum differentia numeratorum duorum primorum, diviſa per differentiam denominatorum eorundem terminorum.

Nam cum terminus ſit infinitus erit is $= \frac{a + \infty c}{b + \infty d}$ cumque a & b, utpote quantitates finitæ reſpectu infi-

infiniti $\frac{\infty\ c}{\infty\ d}$ negligi poſſint, erit terminus ultimus

$= \frac{\infty\ c}{\infty\ d}$ ſeu (*) $= \frac{c}{d}$

LEMMA II.

SI ſit Series infinita fractionum $\frac{a}{b} + \frac{a+c}{b^2} + \frac{a+2c}{b^3}$ - - &c.

in qua numeratores creſcunt Arithmetice, denominatores Geometrice, erit terminus ultimus $= 0$, & conſequenter terminus primus reſpectu ultimi $= \infty$.

Series enim numeratorum, utpote ſecundum legem Seriei Arithmeticæ progredientium multo minus creſcit, quam denominatorum, qui ſecundum legem Seriei Geometricæ procedunt, adeoque denominator termini infiniti, ſeu ultimi ſit infinite major reſpectu ſui numeratoris licet is quoque ſit infinitus. Conſequenter terminus ultimus eſt infiniteſimus, ſeu $= 0$, & ſic terminus primus reſpectu ultimi evadit infinitus.

CAPUT VI.

De Seriebus infinitis fractionum, quarum denominatores ſunt continue proportionales Geometrici, & numeratores ſunt Figurati.

1. SIt Series fractionum infinitarum A, in qua numeratores ſint numeri naturales, denominatores vero progrediantur lege Seriei Geometricæ continuæ; hæc Series reſolvi poterit in alias Geometricas pariter infinitas B, C, D, E, *ut ex figura manife-*

(*) *Per Lemma 12. Sect. III.*

nifeſtum eſt, quarum numeratores nec creſcunt, nec decreſcunt, ſed in omni termino manent iidem, denominatores vero creſcunt in proportione continua Geometrica; Summæ particulares harum Serierum, B, C, D, E, quæ habentur per *Cap. II. huj. Probl. I. Coroll. II.* efformant novam Seriem infinitam fractionum (excepta ſumma Seriei B) quarum numerator manet idem, denominatores vero item creſcunt in proportione continua Geometrica. Quod ſi igitur hæ ſummæ particulares, & infinitæ C, D, E, (excepta prima B, quæ dictam legem non tenet) in unam ſummam colligantur, per idem *Coroll. II. Probl. I. Cap. II. huj.* exhibebit ea ſummam omnium excepta prima B, cui ſi hæc quoque addatur, erit ſumma Serierum B + C + D + E æqualis ſummæ Seriei infinitæ datæ A, ut ex reſolutis Seriebus, & ſubjecto ſchemate liquet. Sit Series data

$$A\quad \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} - - - \&c.$$

Series in has particulares reſoluta

$$B\quad \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} - - \;=\; \frac{ad}{bd-b}$$

$$C\quad - \quad \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \;=\; \frac{c}{bd-b}$$

$$D\quad - - - \quad \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \;=\; \frac{c}{bdd-bd}$$

$$E\quad - - - - - - \quad \frac{c}{bd^3} \;=\; \frac{c}{bd^3-bdd}$$

Series ſum. particularium.

Summa Seriei ſummarum particularium

$$B + C, D, E, \;=\; \frac{ad}{bd-b} + \frac{cd}{b.(d-1)^2}$$

SCHO-

SCHOLION.

Calculum ſummarum Serierum particularium hic brevitatis gratia omittimus, utpote facilem, qui, ut ſupra dictum eſt *per Collor. II. Probl. I. Cap. II. hujus* obtinetur. Hic ſolum ſubjicimus calculum ſummæ Seriei ſummarum particularium (excepta ſumma prima B, quæ legem Seriei non tenet) ut methodum breviorem calculi exhibeamus, qui ceterum ſatis prolixus eſt, & in ſubſequis Seriebus ſemper occurrit.

Sit igitur Series ſummarum particularium (excepta prima B) paullo ante inventarum, C, D, E, nempe $\frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bdd-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2}$ - - &c.

Erit ſumma hujus Seriei, *per Coroll. II. Probl. I. Cap. II. hujus* utpote & decreſcentis & Geometricæ infinitæ, æqualis quadrato termini primi diviſo per differentiam primi, & ſecundi.

Eſt autem (*) quadratum termini primi

$$\frac{cc}{b^2d^2-2b^2d+b^2}$$

Seu brevius $\frac{cc}{bb.(d-1)^2}$

Differentia termini primi & ſecundi (**) & reducendo ad eandem denominationem eſt:

$$\frac{cbd^2-2cdb+cb}{bbd^3-2bbd^2+bbd} \text{ hoc eſt } \frac{bc.(d-1)^2}{bbd.(d-1)^2}$$

Seu

(*) *Sect. II. Cap. V. Prob. VI.*
(**) *Sect. II. Cap. V. Prob. III.*

Seu brevius (*) omittendo utrobique $(d-1)^2$, & ſimul b, erit ea $\frac{c}{bd}$.

Jam vero quadratum $\frac{cc}{bb.(d-1)^2}$ diviſum per differentiam $\frac{c}{bd}$ (**) eſt $\frac{cc.bd}{c.bb.(d-1)^2}$

Seu omittendo utrobique c & b, eſt $\frac{cd}{b.(d-1)^2}$ ſumma nempe Serierum C, D, E. Cui ſi addatur ſumma B, erit omnium ſumma $\frac{ad}{bd-b}+\frac{cd}{b.d-1)^2}$ quam ſuperius exhibuimus.

Notandum præterea: in ſubſequis Seriebus figuratorum primum terminum Seriei ſummarum, qui ſemper eſt $\frac{cd}{bz}$ omitti debere, cum legem Seriei ſummarum novæ non teneat, ut ex ipſa reſolutione numerica liquet, ſubſtituendo nempe pro literis numeros; e. g. ſi a fiat $=1$, $c=1$, $d=2$, $b=2$.

Exempla numerica harum Serierum ſub finem hujus capitis exhibemus, quibus dictam methodum comprobare licet.

2. Si numeratores Seriei ſunt numeri Trigoni, reſolvi poteſt in alias Series communem numeratorem habentes, quarum ſummæ efficiunt Seriem, cujus numeratores ſunt numeri naturales. Summa vero Seriei ſummarum (excepta prima B) eſt ad ſummam Seriei præcedenti numero repertæ, ut $dd : d-1$.

 Sit

(*) *Sect. I. Cap. II. Probl. V.*
(**) *Sect. II. Cap. V. Probl. V.*

Sit Series A $\frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \ldots$

Poſito $d - 1 = z$.

$$\text{B}\quad \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} = \frac{cd}{bz}$$

$$\text{C}\quad \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bdd^3} = \frac{2c}{bz}$$

$$\text{D}\quad + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bdd^3} = \frac{3c}{bdz}$$

$$\text{E}\quad + \frac{4c}{bd^3} = \frac{4c}{bddz}$$

Series Summarum.

Summa totalis novæ Seriei $= \frac{cd^3}{bz^3}$

3. Si numeratores ſint Pyramidales, reſolvitur in alias eundem numeratorem habentes, quarum ſummæ (excepta prima) conſtituunt Seriem Trigonalium, harumque ſumma ad ſummam Trigonalium numero 2 inventam eſt, ut $d : d - 1$, ſeu $d : z$

Eritque ſumma $= \frac{cd^4}{bz^4}$

4. Univerſaliter ſi numeratores ſint quævis figuratorum Series, ſumma Seriei, poſito m exponente figuratorum,

Erit $= \frac{cd^m}{bz^m}$

5. Si

5. Si numeratores ſunt ut Quadrati, reſolvetur in aliam, cujus numeratores ſunt Arithmetici.

Sit A $\frac{a}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \ldots$

B	$\frac{c}{b}$	$+\frac{c}{bd}$	$+\frac{c}{bdd}$	$+\frac{c}{bddd}$	$= \frac{cd.}{bz}$	Series Summarum.
C		$+\frac{3c}{bd}$	$+\frac{3c}{bdd}$	$+\frac{3c}{bd^3}$	$= \frac{3c}{bz}$	
D			$+\frac{5c}{bdd}$	$+\frac{5c}{bd^3}$	$= \frac{5c}{bdz}$	
E				$+\frac{7c}{bd^3}$	$= \frac{7c}{bddz}$	

Summa novæ Seriei $= \frac{cddz + 2cd}{bz^3}$

6. Si numeratores ſunt ut Cubi, reſolvetur in aliam, cujus numeratores erunt ſextupli Trigonalium aucti unitate; cujus ſumma eſt $= \frac{cdd}{bzz} + \frac{6cd^3}{bz^4}$

Ex his formulis generalibus eliciuntur ſummæ infinitarum quarumvis Serierum, ut ex ſubjectis exemplis numericis liquet.

Seri. Natur.	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{2}{4}$	+	$\frac{3}{8}$	+	$\frac{4}{16}$	. . =	2
Trigon.	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{6}{8}$	+	$\frac{10}{16}$	. . =	4
Pyramid.	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{4}{4}$	+	$\frac{10}{8}$	+	$\frac{20}{16}$	. . =	8
Quadrat.	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{4}{4}$	+	$\frac{9}{8}$	+	$\frac{16}{16}$	. . =	6
Cubor.	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{8}{4}$	+	$\frac{27}{8}$	+	$\frac{64}{16}$	. . =	26

CAPUT VII.

De Seriebus fractionum communem numeratorem habentium, quarum Denominatores ſunt numeri figurati.

LEMMA.

1. SI Series M diminuta termino primo $\frac{a}{c}$ ſubtrahatur a ſeipſa, veluti Series N ab M; hoc eſt: ſi quilibet terminus Seriei M diminutæ termino primo ſubtrahatur a termino ſe antecedente; enaſcitur nova Series P, cujus ſumma æquatur termino primo datæ Seriei M nempe $\frac{a}{c}$ minus ultimo ſi ſit finita; ſi infinita

finita, ſeu ſi ultimus terminus ſit infiniteſimus, ſumma præciſe æqualis eſt termino primo $\frac{a}{c}$, omnes enim termini Seriei M (excepto primo & ultimo, a quibus nihil ſubtrahitur) per ſubtractionem terminorum infra poſitorum Seriei P. & N, deſtruuntur. Ut ex figura manifeſtum eſt.

$$M \quad \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} \ldots$$

$$N \quad \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c}$$

$$P \quad \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} = \frac{2a}{c} - \frac{\infty}{\infty}\frac{a}{c}(*) = \frac{a}{c}$$

2. Sit ſeries harmonica

$$A \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$$

Subtrahatur hæc a ſeipſa, quemadmodum in præcedente Serie factum eſt, enaſcetur nova Series B, cujus ſumma, cum terminus ultimus Seriei Harmonicæ ſit infiniteſimus, æqualis eſt termino primo Seriei A, nempe $\frac{1}{1} = 1$. *per Lemma præced.*

$$B \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \ldots$$

Cum denominatores Seriei B ſint dupli Trigonalium, ſi numeratores multiplicentur per 2 fiet nova Series C.

 C 1

(*) *Per Lemma I. Cap. V. huj.*

$$C \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \ldots\ldots$$

cujus denominatores ſunt Trigonales, eritque ejus ſumma = 2

3. Si porro Series C ſubtrahatur a ſemetipſa, quemadmodum *numero* 1 factum eſt, oritur alia Series D.

$$D \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{12} + \frac{2}{30} + \frac{2}{60} \ldots\ldots$$

cujus ſumma vi *numeri* 1 erit = 1

Verum cum hujus Seriei D denominatores ſint tripli Pyramidalium ſi quilibet terminus multiplicetur per 3 fiet Series E.

$$E \quad \frac{2}{1} + \frac{2}{4} + \frac{2}{10} + \frac{2}{20} \ldots\ldots$$

cujus denominatores erunt Pyramidales, & ſi rurſus termini dividantur per 2 fit Series F.

$$F \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \ldots\ldots$$

cujus numeratores ſunt unitates denominatores vero Pyramidales.

Cum ergo multiplicando terminos Seriei D per 2, & terminos Seriei E dividendo per 3 enata ſit Series F; ſumma Seriei F habitur, ſi ſumma Seriei D, quæ eſt = 1 multiplicetur per $\frac{3}{2}$, eſt adeo ſumma F = $\frac{3}{2}$

Et Seriei E = 3

4. Si

4. Si Series F denuo a ſeipſa ſubtrahatur, emergit G

G $\frac{3}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{60} + \frac{3}{280} \ldots\ldots$

cujus ſumma $= 1$.

Cum denominatores ſunt quadrupli triangulo pyramidalium, ſi dividantur termini per $\frac{4}{3}$

fiet nova Seriet H

H $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} \ldots\ldots$

in qua numeratores ſunt unitates, & denominatores ſunt triangulo - pyramidales.

Cum ergo ſumma Seriei C ſit $= 1$.

Multiplicando per $\frac{4}{3}$, erit ſumma H $= \frac{4}{3}$

Qua methodo ſi procedatur, reperiuntur ſummæ Serierum figuratorum ſequentium, nempe $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}$ in infinitum.

SCHOLION.

Summa Seriei infinitæ harmonicæ

$\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \ldots\ldots$

eſt infinita.

Hujus theorematis elegantem demonſtrationem invenit Joannes Bernoliūs.

Cum enim ſubtrahendo quæſiviſſet Seriem evaſcentem invenit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{20} \cdot \cdot \cdot$

cujus ſumma $= 1$.

Reſolvendo porro hanc novam Seriem in Series Geometricas, ut alia methodo inveniret ſummam, invenit rurſus ejus ſummam æquari Seriei harmonicæ. At hoc eſſet abſurdum, ſi Series harmonica eſſet finita, pars etenim eſſet æqualis toto. Atque hinc concluſit eſſe infinitam.

COROLLARIUM.

SUmmæ igitur omnium Serierum, quarum numeratores ſunt unitates, denominatores vero ordine figurati, habentur per hanc Seriem.

$$\frac{1}{0} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}. \&c.$$

PROBLEMA III.

Invenire in infinitum Series infinitas ſummabiles.

SIt fractio $\frac{l}{m+n}$, & fiat continua diviſio. Erit quotus infinita Series.

$$\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{l}{m+n}$$

Sit

Sit exempli gratia $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$, & erit

$l = 1$; $m = 1$; $n = 2$, & fiet

Series $\frac{1}{1} - 2 + 4 - 8 + 16 \ldots\ldots = \frac{1}{3}$

CAPUT VIII.

De Variationibus.

VAriationes vocantur mutationes ordinis, aut ſitus, quæ accidere poſſunt pluribus.

Notandum vero res variabiles duplicis eſſe poſſe ſpeciei, vel enim ſingulæ ſunt diverſæ ut *a*, *b*, *c*, *d*, vel aliquæ earum ſunt ejusdem ſpeciei, ut *aa*, *b*, *cc*, *d*.

PROBLEMA I.

Determinare Variationes, cum ſingulæ res variabiles ſunt diverſæ.

1. UNius rei e. g. unius literæ *a* una eſt variatio.
2. Duarum *a*, & *b* ſunt duæ *ab*, & *ba*.

3. Si vero ſint tres *abc* poterunt primo ſic diſponi, ut prima ſit *a*, & cum reliquæ *bc* duobus modis diſponi poſſint, ſequitur, prima exiſtente *a* fieri variationes duas, pariter duas exiſtente prima *b*, duas item prima exiſtente *c*, trium ergo ſex ſunt variationes.

Nempe *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

4. Si quatuor ſint, cum qualibet harum exiſtente prima fiant ſex variationes, ſequitur quatuor literarum eſſe variationes 24, atque hinc

Si fiat Series numerorum naturalium incipientium ab unitate tot terminorum, quot res variabiles dantur, & termini inter ſe multiplicentur, factum exhibet ſummam omnium variationum. Sic ſi dentur literæ 5 *abcde*, erit Series, 1. 2. 3. 4. 5. = 120.

Et univerſaliter ſit dentur quotunque *n*, erit. 1. 2. 3. 4. - - - - *n*

PROBLEMA II.

Determinare Variationes, cum aliquot ex variabilibus ſunt ejusdem ſpeciei.

1. SIt numerus rerum *aaabcd* in quibus res *a* ter repetatur. Ad inveniendas earum variationes obſervo, quod ſi omnes eſſent diverſæ, & loco trium *aaa* eſſent a*Aa*, poſſent ex ſupradictis hæ tres variari ſex modis, cæteris in ſuo ſitu manentibus. Cum autem ſint ſimiles ex hypotheſi, ac proinde conſiderari debeant per modum unius, ſequitur, quod numerus variationum rerum, quarum tres ſunt ejusdem ſpeciei ſit ſexta pars de numero variationum quarum omnes ſunt diverſæ. Quod ſi eſſent quatuor fieret pars vigeſima quarta. Atque hinc univerſaliter dividendus erit numerus totalis variationum, per numerum variationum, qui reſpondet numero rerum, quæ ſunt ejusdem ſpeciei.

2. Quod ſi duæ ſpecies repetantur, ut in *aaabbc*, eadem methodo invenietur, quod, quemadmodum propter tres ſimiles *aaa* dividi debeat, numerus per 6, ita propter duas *bb* debeat dividi per 2; ac proinde fiet pars duodecima.

Hinc exurgit Methodus generalis inveniendi in qualibet hypotheſi variationes. Ut nempe fiat productum totale reſpondens numero rerum; hoc productum

ductum dividatur per producta omnium variationum reſpondentium rebus, quæ ſunt ejuſdem ſpeciei.

Ita ſi dentur octo res, quarum duæ ſunt unius ſpeciei, & tres alterius, erunt variationes

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ 8.}{1.\ 2.\ \ 1.\ 2.\ 3.} = 3360$$

CAPUT IX.

De Combinationibus.

Combinationes dicuntur conjunctiones rerum, in quibus nulla habita ratione ſitus, aut ordinis, numerus tantum conſideratur, quo res datæ ſimul ſunt conjungendæ.

Et ſpeciatim ſi conjungatur per numerum binarium, dicitur fieri combinatio per *binarios*, ſi per ternarium, per *ternarios*, &c. ſi ſummantur ſingilatim, combinatio dicitur eſſe unitatum.

2. Numerus autem ſecundum quem combinantur dicitur combinationis *exponens*, qui ſi per binarios conjungantur, eſt 2, ſi per ternarios 3, & ſic porro.

PROBLEMA I.

Invenire numerum combinationum, cum res combinabiles ſingulæ ſunt diverſarum ſpecierum, & cum qualibet ſecum ipſa combinari poteſt.

Sint combinandæ res *a. b. c. d* &c.

Ut cognoſcantur earum combinationes, ponantur primo in unam Seriem *a. b. c. d.* ut videre eſt in figura. Tum jungatur litera *a* & ſecum, & cum reliquis, ponanturque ordine binarii ita, ut literæ *a* reſpondeant *aa*, literæ *b* reſpondeant *ab*, *bb*, & lite-

ræ

ræ *c* reſpondeant *ae*, *bc*, *cc*. Demum litteræ *d. ad. bd. cd. dd.* Ut habeantur Ternarii, conbinentur litteræ ſingulæ, & cum binariis ſuæ Seriei, & cum binariis Serierum præcedentium. Idem intelligendum eſt de quaternariis &c. & habebuntur Series quædam ſingularum combinationum, ut ex figura colligitur.

a. aa. aaa.
b. ab. bb. aab. abb. bbb.
c. ac. bc cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.
d. ad. bd. cd. dd. aad. abd. bbd. acd. bcd. ccd. add. bdd. cdd. ddd.

Si paullo attentius hæc tabula conſideretur, reperietur combinationes unitatum efformare Seriem unitatum. I. I. I. I.

Binarios efformare Seriem numerorum naturalium I. 2. 3. 4.

Ternarios Seriem Trigonalium I. 3. 6. 10.

Quod ſi tabula porro continuetur, reperietur, quarternarios efformare Seriem triangulo - piramidalium I. 4. 10. 20. 35.

Quinquenarios Seriem I. 5. 15. 35 & ſic procedendo.

Hinc obtinetur Methodus determinandi numerum combinationum in problemate quæſitum ſecundum quemlibet exponentem.

Sit enim *n* numerus rerum combinabilium, & erunt combinationes ſolitariæ æquales numero unitatum, combinationes per binarios æquales ſummæ numerorum naturalium, per ternarios trigonalium, per quaternarios pyramidalium.

Hinc eadem formula generalis, qua determinatæ ſunt ſummæ numerorum figuratorum, dabit etiam numerum combinationum ſecundum quemlibet exponentem.

Nem-

Nempe $\frac{n.n+1.n+1.n+3.n.+4\ldots\ldots n+c-1}{1,\ 2.\quad 3.\ldots 4.\ldots 5.\qquad .c}$

Sint exempli gratia quærendæ combinationes per binarios rerum 8; & erit $n = 2$.

Fietque ſumma $\frac{8\ .\ 9}{1\ .\ 2} = 36$

Si quærantur combinationes ternariorum, erunt $\frac{8.\ 9.\ 10.}{1.\ 2.\ 3.} = 120$

Si quaternariorum ſit $\frac{8.\ 9.\ 10.\ 11}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$

PROBLEMA II.

Determinare numerum combinationum, cum res combinabiles ſunt omnes diverſæ, & nulla poteſt ſecum combinari.

Fiant tot Series, quot dantur res ſeu literæ, hoc modo: in Serie prima ponatur ſola litera *a*, in Serie ſecunda ponatur *b* prima, in tertia *c* &c ut obtineantur cujuslibet Seriei combinationes binariorum, quælibet litera prima cum literis ſe præcedentibus multiplicetur, idem eſt de combinationibus ternariorum, quaternariorum &c. ut figura exhibet.

a.
b. ab.
c. ac. bc. abc.
d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.
a. ae.be.ce.de.abe.ace.bce.ade. bde. cde. abce.abde.acde.bcde. abcde.

Ex

Ex hac figura attentius conſiderata, obſervare licet, Series combinationum efformare Series numerorum figuratorum incipientes a cyphris.

Ita quantitates ſolitarias efformare ſeriem unitatum generatricum, 1. 1. 1. 1. 1.

Binaria efformare Seriem numerorum naturalium

	0. 1. 2. 3. 4
Ternaria trigonalium	0. 0. 1. 3. 6
Quaternaria pyramidalium	0. 0. 0. 1. 4
Quinaria trigonopyramidalium	0. 0. 0. 0. 1

Atque hinc colligitur ſummam combinationum æquari ſummæ figuratorum incipientium a cyphris.

Quare ſi res combinabiles dicantur n
Erit ſumma unitatum n
Summa Binariorum $\frac{n . \overline{n - 1}}{1 . 2}$
Summa Ternariorum $\frac{n . \overline{n - 1} . \overline{n - 2}}{1 \quad 2 \quad 3}$
Summa Quaternianorum $\frac{n . \overline{n - 1}\ \overline{n - 2} . \overline{n - 3}}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.}$

Et generaliter poſito Exponente c erunt combinationes.

$$\frac{n . \overline{n - 1} . \overline{n - 2} . \overline{n - 3} . \overline{n - 4} - - - \overline{n - c + 1}}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 - - c}$$

Sint igitur combinandæ quantitates 90.
Erit ſumma Unitatum = 90
Summa Binariorum = $\frac{90 . 89}{1 . 2}$

$= \frac{90 \quad 89}{1 . 2}$

Sum-

Summa Ternarioum $= \frac{90.\ 89.\ 88.}{1.\ 2.\ 3.}$

Summa Quaternariorum $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$

PROBLEMA III.

Dato in eadem hypotheſi numero rerum combinabilium, & dato exponente combinationis, ſi ex eodem numero aliquot res eligantur, ut A. B. C. D. E. determinare quot quot Combinationes contineant A. B. C. excluſis D. & E.

Sit numerus rerum combinabilium n; numerus rerum electarum m; pars electarum b; exponens c; erit numerus rerum minus electis $= n - m$; quibus combinatis formula prioris problematis tranſibit in hanc

$$\frac{n-m.\overline{n-m-1}.\overline{n-m-2}.\overline{n-m-3}\cdots\overline{n-m-c+b+1}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\cdots\ \overline{c-b}}$$

quæ exprimit combinationes omnium præter electas b.

Addendo his combinationibus partem b tum habentur combinationes ſecundum exponentem c, ut quærebatur.

Sint exempli gratia res 20, ex quibus 5 eligantur, & quærantur ſenarii, in quibns tres ex electis combinentur excluſis reliquis, erit formula $\frac{15.14.13.}{1.\ 2.\ 3.}$

ex

ex qua intelligitur idem eſſe, ac ſumere ternarios reliquarum 15.

PROBLEMA IV.

De numero rerum combinabilium quarum nulla poteſt ſecum combinari, determinare numerum combinationum variatarum juxta quemlibet exponentem.

SI numerus dicatur n, & exponens c, numerus combinationum ſine variationibus exponetur per formulam.

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2\,n-3\ldots n-c+1}{1.\,2\,.\,.\,3\,.\,.\,.\,4\ldots\ldots c}$$

Sed cum omnes iſtæ combinationes componuntur ex rebus, quorum numerus eſt c; & conſequenter poteſt fieri variatio ſecundum formulam *Probl. I. Cap. VIII.* repertam, nempe $1.\,2.\,3.\,4.\ldots\ldots\ldots c$ ſequitur quod ut habeantur combinationes variatæ, multiplicandus ſit combinationum numerus per numerum variationum, ac proinde formula in hanc tranſit.

$$n.\,n-1.\,n-2\,n-3\ldots\ldots n-c+1$$

Ita ſi ſint res 10; & quærantur ſenarii variati, erunt 10. 9. 8. 7. 6. 5. = 151200.

PRO-

PROBLEMA V.

Dato numero rerum combinabilium, quarum qualibet poteſt ſecum combinari, determinare numerum combinationum variatarum juxta quemlibet exponentem.

SInt quotlibet res *a. b. c.* quarum numerus eſt *n.* erunt primo combinationes ſolitariæ tot, quot ſunt res; nempe *n*,

Ut habeantur binarii, ponatur *a* prima, & fient binarii *aa. ab. ac. ad.* quorum numerus *n.* nempe in noſtra hypotheſi 4. & quoniam poſita qualibet alia prima totidem habentur binarii, erunt binarii 16, ſeu in quocunque caſu $= nn$.

Si cum binariis combinetur prima litera, habentur 16 ternarii, & combinando omnes, erunt quater 16. Multiplicandus erit igitur numerus 16. per 4. ſeu ex 4 fiat cubus; & in genere numerus ternariorum erit n^3. Eadem methodo inveniuntur quaternarii n^4, quinarii n^5, & poſito exponente *c*; erit formula generalis n^c.

Sint ergo ſex res, quarum quaternarii variati quærantur, & erunt $6^4 = 1296$.

Sic ex 9 notis numericis quaternarii omnibus modis variati ſunt $9^4 = 6561$.

Sic ſi ſint vocales A. E. I. O. quibus exprimuntur in Logica quatuor propoſitionum ſpecies, prima, Univerſalis Affirmativa, ſecunda Univerſalis Negativa, tertia Particularis Affirmativa, quarta Particularis Negativa, quarum ternarium eſt Syllogiſmus, cognoſcentur omnes poſſibiles Syllogiſmi, determinando omnes poſſibiles hujuſmodi ternarios, erunt hi ſecundum regulam $4^3 = 64$ non 36, ut cenſuit Ariſtoteles. (*)

(*) *Si plura cupis, vide excellentes tractatus Jacobi Bernoulli in Arte conjectandi.*

CAPUT X.

De Binomii poteſtatibus in infinitum.

SI ſit Binomium $a + b$, & multiplicetur per ſe ipſum, erit ejus quadratum $aa + 2ab + bb$, ejus cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$; & ſi continuetur multiplicatio, erunt ejus poteſtates, ut in figura.

a	$1b$							
aa	$2ab$	$1.bb$						
a^3	$3aab$	$3abb$	$1.b^3$					
a^4	$4a^3b$	$6aabb$	$4ab^3$	$1.b^4$				
a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10aab^3$	$5ab^4$	$1.b^5$			
a^6	$6a^5b$	$15a^4bb$	$20a^3b^3$	$15aab^4$	$6ab^5$	$1.b^6$		
a^7	$7a^6b$	$21a^5bb$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21aab^5$	$7ab^6$	$1.b^7$	
a^8	$8a^7b$	$28a^6bb$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28aab^6$	$8ab^7$	$1.b^8$

Si

Si conſideretur hæc tabula, illud obſervandum venit: terminos poteſtatum componi ex numeris, & literis. Qua lege literæ procedunt, haud eſt difficile intelligere, ſi ſingulæ ex his poteſtatibus examinentur. In quacunque enim poteſtate litera *a* incipit a poteſtate, ad quam debet elevari Binomium, & gradatim per omnes poteſtates deſcendit usque ad poteſtatem nullam. E contra litera *b* incipit a poteſtate nulla, & aſcendit ad exponentem datum; ex quibus fit, ut facile inveniantur elementa literalia.

Sit enim elevandum binomium $a + b$ ad poteſtatem ſextam. Fiant Series A, & B; in prima Serie A ponantur poteſtates decreſcentes literæ *a* incipientes a ſexta usque ad unitatem, ſeu poteſtatem nullam, in ſecunda B. ponantur poteſtates literæ *b* incipientes ab unitate, & creſcentes usque ad ſextam.

A $a^6.$ $a^5.$ $a^4.$ $a^3.$ $a^2.$ $a^1.$ 1.

B 1. $b^1.$ $b^2.$ $b^3.$ $b^4.$ $b^5.$ b^6

a^6, $a^5 b$, a^4, $a^3 b$, ab^5, b^6.

Poteſtates unius Seriei multiplicentur per ſingulas infra poſitas alterius, & habebuntur literalia producta.

Ut autem habeantur numeri, ſive *Coefficientes*, ſive *Unciæ*, ut Oughredus vocat, illud obſervare licet, numeros ipſos procedere ſecundum combinationes dati exponentis.

Ita in ſexta poteſtate, cujus nempe exponens eſt 6, primus coefficiens eſt 1, nempe idem ac combinatio nulla; ſecundus eſt 6; nempe numerus combinationum ex unitatibus, tertius eſt 15, nempe quot ſunt binaria numeri 6; tum 20. 15. 6. 1 nempe quot ſunt Ternaria, Quaternaria, Quinaria, & Seneria numeri 6.

Sic in poteſtate ſeptima coefficientes ſunt 1.7.21.35. 35.21.7. 1. quot nempe ſunt combinationes exponentis n; incipiendo a combinatione nulla usque ad combinationem ſeptenariorum.

Eadem igitur formula, quæ combinationes continet, continebit etiam coefficientes Binomii, & ſi exponens dicatur n. erunt coefficientes cujuscunque poteſtatis in infinitum.

$$\frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4 \ldots}{1 \,.\, 2 \,.\quad 3 \,.\quad 4 \,.\quad 5 \ldots}$$

Formula vero univerſalis pro ſingulis Poteſtatibus in infinitum erit.

$$a^n + \frac{n a^{n-1}}{1} b + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, a^{n-2}}{1 \,.\, 2} bb$$

$+ n.$

$$+\frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}a^{n-3}b^{3}$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}a^{n-4}b^{4}$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.}{1.2.3.4.5.}a^{n-5}b^{5}$$

&c.

SCHOLION.

Quoniam exponens n poteſt ſignificare tam numerum negativum, quam poſitivum, & integrum æque ac fractum, maxima hujusce Canonis Admirabilis utilitas in eo præſertim poſita eſt, ut tam ad elevandas quascunque quantitates ad poteſtates poſitivas, quam negativas inſerviat, nempe & ad efformandam quamlibet quantitatis notæ Potentiam, & ad extrahendam quamlibet Radicem.

Illud autem diſcriminis inter exponentem poſitivum, & negativum intereſt, quod ubi datæ Potentiæ exponens eſt poſitivus, quoniam tum n eſt numerus integer, Series tandem convergit, & fit finita. At ſi extrahenda ſit radix, quoniam tum n eſt numerus fractus, Series nunquam convergit, & fit infinita.

DE

ÆQUATIONIBUS

ALTIORUM ORDINUM.

PARS II.

Definitiones.

1. Æ*Quatio* dicitur, cum una quantitas æquatur alteri quantitati.

Ut ſi detur $4x = 9$.
Vel $6x + 7 = 9$
Vel $6xx + 4x = 8$
Vel univerſaliter $ax + xx = bb$

2. *Æquatio quadratica* eſt, cum maximus gradus, ad quem quantitas incognita aſſurgit, eſt quadratum.
Ut $xx + 5x = 6$

3. *Æquatio cubica*, cum quantitas incognita ad cubum aſſurgit.
Ut $x^3 - 8xx + 6x = 10$

4. *Æquatio quadrato-quadratica* cum ad quadrato-quadratum
Ut $x^4 - 6x^3 + 4xx - 6x = 10$

5. Univerſaliter vocatur primi, ſecundi, tertii gradus Æquatio juxta maximam poteſtatem, ad quam in ipſa elevatur incognita quantitas.

6. *Terminus*, in quo reperitur maxima incognitæ poteſtas, dicitur primus; poteſtates vero ordine minores conſtituunt *ſecundum*, *tertium*, *quartum*, ſic in allata Æquatione x^4 eſt primus terminus, $-6x^3$ ſecundus, $+4xx$ tertius, dein quartus, quintus.

7. *Æquatio*, cui deeſt aliquis terminus, dicitur *Deficiens*.

Ut $x^4 \ldots - 6xx \ldots + 5 = 0$.

In qua deficit ſecundus & quartus.

8. Quantitates datæ, quæ multiplicant incognitam in quocunque termino, vocantur terminorum *Coefficientes*.

Ut ſi detur $x^4 + 4x^3 - 6xx + 8x - 6 = 0$ 4 eſt coefficiens termini ſecundi, -6 tertii, $+8$ quarti.

9. Terminus vero -6, in quo incognita non reperitur, dicitur *Homogeneus*.

10. *Quantitas*, quæ loco incognitæ ſubſtituta facit, ut omnes termini evaneſcant, fiantque $= 0$, dicitur *Æquationis Radix*.

Et cum hujusmodi quantitates plures eſſe poſſint in una eademque Æquatione, plures quoque poſſunt eſſe radices.

Ut ſi detur Æquatio $xx - 5x + 6 = 0$ quoniam ſubſtituendo 2 loco x, termini evaneſcunt, & fiunt æquales nihilo, erit 2 radix hujuscemodi Æquationis. Et ſimiliter quia ſubſtituto 3, item evaneſcunt, erit 3 altera radix.

Quoniam vero nulla alia quantitas ſubſtituta loco incognitæ facit terminos evaneſcere, nulla alia quantias erit radix hujusce Æquationis.

Ub

Ubi notandum tot ad ſummum eſſe poſſe radices Æquationis, quot ſunt gradus, ad quos incognita aſſurgit.

Sic quia ad duos gradus tantum in allata Æquatione aſſurgit incognita, duas tantum & non plures habere poteſt radices. In æquatione cubica tres, in biquadrica quatuor, & ſic in aliis.

Hinc pendet varietas ſolutionum in problematibus. Illa enim æquatio duas ſolutiones admittit, in qua duæ reperiuntur radices hujusmodi, quæ faciunt evaneſcere terminos omnes, tres, in qua tres, & ſic porro.

Sic ſi quæratur numerus, cujus quadratum iminutum quinque hujuscemodi numeris, ſeu radicibus numericis quinquies acceptis æquatur -6, poſito numero quæſito x, fiet æquatio $xx - 5x = -6$. in qua cum duæ ſint radices, nempe 2, & 3; duo erunt numeri, qui propoſitam conditionem habebunt.

Sic ſi datur Æquatio

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

quoniam ipſius tres ſunt radices, nempe 2, 3, 4, tres quoque diverſas ſolutiones admittit.

Univerſaliter quot dantur radices hujusmodi, tot ſolutiones problema admittit, totque dimenſionum eſt æquatio, & contra.

11. Radices hujusmodi ſunt vel *poſitivæ*, vel *negativæ*; In eodem enim problemate numerus quæſitus jam poteſt eſſe poſitivus, jam negativus, pro varietate nempe conditionum. Ita ſi quæratur, quot aureos quis habeat, qui lucratus 100, reperitur habere 60. Fiet æquatio $x + 100 = 60$, hoc eſt, $x + 40 = 0$, unde cum valor x ſit negativus, ſeu -40,

 dicen-

dicendum eſt eum non modo nihil habere, ſed ei 40 deficere, ut lucratus 100 dici poſſit habere 60, quod dicitur, *habere 40 in partem contrariam.*

Similiter ſi lineæ datæ AB duodecim pedum quæratur,

A B C

|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|···|···|···|···|

quot pedes quis debeat percurriſſe, ut reliquum ejusdem lineæ percurerre poſſit quatuor velocitatis gradibus eodem tempore, quo alter percurreret totam AB tribus velocitatis gradibus; erit æquatio $x + 16 = 12$, hoc eſt $x + 4 = 0$, conſequenter cum valor x ſit negativus ſeu $x = -4$ eum non modo datæ lineæ AB nihil debere percurriſſe, ſed quatuor pedibus regredi debere verſus C, ut eodem tempore, quo alter tribus velocitatis gradibus currens ex B in A pervenit, hic quatuor gradibus velocitatis currens in A reperiatur. Quod item dicitur, *debere facere 4 pedes in partem contrariam.*

Ex quibus patet, cum in æquatione reperitur radix negativa, problema non fuiſſe rite conceptum, ſed paullo aliter enunciandum eſſe. Sic in caſu primo, non debet quæri, quot habeat aureos, ſed quot ei deficiant, qui lucratus 100 habet 60.

Similiter in ſecundo caſu non debet quæri, quot pedes datæ lineæ debeat percurriſſe, ſed quot pedibus regredi debeat, ut quatuor gradibus velocitatis eodem tempore, quo alter tribus gradibus velocitatis currens per lineam 12 pedum in eodem termino A conveniant.

Hæ radices negativæ, ſeu quantitates in partem contrariam acceptæ maximi uſus ſunt in Geometria.

Iis-

Iisdem conditionibus reſpondere poteſt ſimul tam poſitiva, quam negativa quantitas.

Ut ſi detur Æquatio $xx + x - 6 = 0$ cujus ſunt duæ radices $2. - 3$ id argumento erit tam ex numero poſitivo 2, quam ex negativo $- 3$ ſolvi problema.

12. Radices tam poſitivæ, quam negativæ ſunt vel *Rationales*, vel *Irrationales*, ſeu ſurdæ, de quibus Parte I. actum.

13. In æquatione problematis contradictionem involventis impoſſibile eſt invenire radices.

Si ſic quæratur numerus, cujus quadratum, una cum quadruplo ipſius numeri $+ 10$ ſit æqaulis nihilo, ſeu zero, ſiet æquatio $xx + 4x + 10 = 0$

Verum cum talis numerus ſit impoſſibilis, erunt etiam impoſſibiles hujus æquationis radices. Sunt autem æquationis hujus radices una $= (\surd - 8) - 2$, altera $= - (\surd - 8) - 1$, utraque & contradictoria, & impoſſibilis, ut Parte I. oſtenſum eſt.

Radices hujuſmodi vocantur *Imaginariæ*, quales ſunt omnes radices poteſtatum negativarum dimenſionum parium, hoc eſt, potentiæ negativæ ſecundæ, quartæ, ſextæ, octavæ, decimæ &c. ut $\surd - 4$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-8}$.

Hujuſmodi radices occurrentes in æquatione, impoſſibilitatem problematis oſtendunt.

CAPUT I.

Geneſis, & Natura æquationum.

Sit æquatio ſimplex $x - 3 = 0$; & multiplicetur per aliam æquationem ſimplicem $x - 4 = 0$ fiet æquatio quadratica $xx - 7x + 12 = 0$

Si rurſus hæc æquatio multiplicetur per $x - 5 = 0$ fit Æquatio cubica.

$$x^3 - 12xx + 47x - 60 = 0$$

Rurſus multiplicando per $x - 6$ fit Æquatio biquadratica.

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 342x + 360 = 0$$

Eodem modo procedendum in literalibus.

Sit enim $x - a = 0$, & multiplicetur per $x - b$, & fiet Æquatio quadratica

$$\begin{array}{l} xx - ax + ab = 0 \\ \quad\; - bx \end{array}$$

Rurſus multiplicetur per $x - c$, & fiet Æquatio cubica

$$x^3 \begin{array}{l} - axx + acx \\ - bxx + bcx \\ - cxx + abx \end{array} - abc = 0$$

Multiplicetur etiam per $x - d$, & fit Æquatio biquadratica.

$$x^4 \begin{array}{llll} - axxx & + acxx & - abcx & \\ - bxxx & + bcxx & - acdx & \\ - cxxx & + abxx & - bcdx & = 0 \\ - dxxx & + adxx & - abdx & \\ & + bdxx & + abcd & \\ & + cdxx & & \end{array}$$

Et ſic in infinitum.

Ex

Ex geneſi hac Æquationum multas colligere licet leges, quæ ſunt totius Artis Analyticæ fundamentum, ut primi notarunt Carteſius, & Harriotus.

1. Et primo illud notandum, quod quælibet Æquatio altioris ordinis poſſit ſemper conſiderari ut productum ex æquationibus ſimplicibus, quæ tot ſunt, quot ſunt gradus in Æquatione compoſita. Sic Æquatio quadratica ex duabus ſimplicibus efformatur, cubica ex tribus, quadrato-quadrata ex quatuor, & ſic in infinitum.

2. Quare ſi detur Æquatio ſimplex, poterit ſemper Æquatio compoſita per eam dividi, & ad gradum minorem deprimi.

Sic quoniam Æquatio
$x^4 - 18x^3 + 119xx - 342x + 360 = 0$
componitur ex quatuor ſimplicibus, quarum una eſt $x - 3 = 0$, poterit per eam dividi exacte, & fiet $x^3 - 15xx + 74x - 120 = 0$

Eadem quoque æquatio dividi poterit exacte per $x - 4$, vel $x - 6$, & deprimetur ſemper ad Cubicam.

Quod ſi innoteſcunt duæ æquationes ſimplices, poterit ſemper Æquatio compoſita dividi per earundem productum, & duobus gradibus deprimi.

Sic quia duæ ex componentibus ſunt $x - 3$, & $x - 4$, quorum productum eſt $xx - 7x + 12 = 0$, poterit illa per idem productum dividi, & fiet quotus $xx - 11x + 30 = 0$

Eodem modo eadem æquatio dividi poteſt exacte per productum trium æquationum ſimplicium componentium, nempe per $x - 3 . x - 4 . x - 5$ eritque quotus $x - 6 = 0$, quæ eſt quarta æquationis componens.

Idem

Idem eſto de literalibus.

Ex quibus deducitur methodus indagandi an aliqua quantitas ſit radix. Nempe efformetur ex ipſa Æquatio ſimplex, & per eam dividatur propoſita Æquatio. Si enim quantitas aſſumpta ſit radix, tum fiet exacta diviſio.

Sic ſi datur Æquatio

$$x^4 - 18x^3 + 119xx - 342x + 360 = 0$$

& probandum ſit an $x = 3$, ſeu an 3 ſit juſta radix; dividatur præfata Æquatio per $x - 3 = 0$ per quam cum fiat exacta diviſio, recte concluditur 3 eſſe juſtam radicem. Et quoniam eadem Æquatio exacte divditur per $x - 4$, $x - 5$, $x - 6$, erit quælibet ex his quantitatibus juſta radix.

Sed ſi dividatur per $x - 7$, vel $x - 8$, quoniam non fit exacta diviſio, concludendum erit neutrum numerum eſſe radicem.

Eodem modo ſi detur Æquatio literalis

$$\begin{matrix} xx - ax + ab = 0 \\ - bx \end{matrix}$$

cujus radices ſunt a, & b poterit exacte dividi per $x - a$, & per $x - b$.

Sed ſi dividatur per $x - c$; quoniam non fit exacta diviſio, c non erit Æquationis præfatæ radix.

3. Notanda eſt ipſa conſtitutio Coefficientium. Sit enim primo Æquatio univerſalis $\begin{matrix} xx - ax + ab = 0. \\ - bx \end{matrix}$

cujus duæ ſunt radices a, & b; primo obſervari poteſt, coefficientem ſecundi termini eſſe aggregatum ipſarum radicum a, & b ſed contrario ſigno effectarum, homogeneum vero eſſe productum ipſarum radicum.

Sit

Sit ſecundo loco Æquatio cubica

$$\begin{aligned} x^3, &- axx + abx \\ &- bxx + acx - abc = 0 \\ &- cxx + bcx \end{aligned}$$

in qua notatur, coefficientem ſecundi termini eſſe aggregatum ipſarumet radicum a, b, c, coefficientem termini tertii eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis, & homogeneum eſſe productum ex ternis.

Eodem modo, ſi quælibet efformatur Æquatio, cognoſci poterit ſecundi termini coefficientem eſſe aggregatum omnium radicum, coefficientem tertii eſſe aggregatum productorum ex ſingulis binis, quarti eſſe aggregatum productorum ex ſingulis ternis, & ſic procedendo fiet aggregatum ex quaternis, quinis, &c. usque ad homogeneum, qui eſt omnium radicum productum.

Ex quibus ſequitur, quod ſi detur, exempli gratia, Æquatio biquadratica.

$$x^4 - 18x^3 + 119\,xx - 342\,x + 360 = 0$$

cujus radices quærantur, problema eo redire, ut quærantur quatuor numeri, quorum aggregatum eſt 18, aggregatum productorum ex binis eſt 119, aggregatum productorum ex ſingulis ternis eſt 342, tandem productum ex quatuor eſt 360.

Ex qua obſervatione prodit prima generalis methodus eruendi radices rationales, quæ Æquationem componunt. Cum enim Homogeneus ſit ipſarum productum, erit radix Æquationis aliquis Homogenei productor. Quærantur itaque homogenei productores, & probetur quinam ex ipſis ſubſtitutus in æquatione terminos ad nihilum redigit, eritque hujuſmodi productor Æquationis radix.

Sit enim exempli gratia

$$xx - 5x + 6 = 0$$

& quoniam productores ipſius 6 ſunt 1, 2, 3; jam ſubſtituto 1 loco x termini non evaneſcunt, igitur 1 non erit Æquationis radix. Sed ſubſtituto tam + 2; quam + 3. evaneſcunt termini, uterque ergo erit radix.

Similiter ſi ſit æquatio univerſalis

$$\begin{aligned} xx - ax + ab &= 0 \\ - bx & \end{aligned}$$

Quoniam homogenei factores ſunt a, & b. Subſtituatur a, pro x & quia termini tunc fiunt

$$aa - aa - ab + ab = 0$$

erit a Æquationis radix.

Similiter ſi ſubſtituatur b, fient termini

$$bb - ab - bb + ab = 0$$

Igitur b erit ejus æquationis altera radix.

Idem dic de quacunque altiore Æquatione.

Reperiendi igitur ſunt diviſores omnes termini homogenei, qui ſequente methodo reperiuntur.

Datæ quantitatis invenire omnes diviſores.

1. SI quantitas data ſit numerus, dividatur ille per minimum ſui diviſorem, quotus porro per minimum, & ſic procedendo, donec quotus fiat indiviſibilis, hoc modo habebuntur omnes primi diviſores. Tum capiantur producta ex ſingulis binis, ternis, quaternis &c. & habebuntur diviſores compoſiti.

Ita ſi numeri 20 omnes diviſores quærantur, dividatur primo per 2, quotus 10 item per 2, quotus erit 5, qui eſt indiviſibilis in quotum integrum. Diviſores ergo primi erunt 1. 2. 2. 5. At, qui ex binis

nis componuntur, ſunt 4. 10; & qui ex ternis eſt 20. Omnes igitur diviſores erunt 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Simili modo ſit 140.

Diviſores primi ſunt 1. 2. 2. 5. 7.

Diviſores ex binis 4. 10. 14. 35.

Diviſores ex ternis 20. 28. 70.

Diviſores ex quaternis 140.

Si quantitas ſit literalis, eodem modo eſt procedendum.

Ita ſi ſit quantitas $8mnn$.

Dividatur primo per 2, quotus $4mnn$ item per 2, quotus $2mnn$ porro per 2, erit quotus mnn; hic quotus dividatur iterum per m, quotus nn per n, fietque quotus n, qui eſt indiviſibilis.

Quare quantitatis $8mnn$ diviſores primi ſunt 1. 2. 2. 2. m. n. n.

Diviſores ex binis 4. $2m$. $2n$.

Diviſores ex ternis $8m$. $8n$.

Ex quaternis $8mn$. $8nn$.

Ex quinis $4mnn$.

Ex ſenis $8mnn$, quæ eſt ipſa quantitas propoſita $8mnn$.

4. Ex ipſa hac conſtitutione coefficientium numero priore dicta, illud obſervat Harriotus, quod toties ſibi eadem ſigna + vel − ſuccedunt, quot ſunt in Æquatione radices negativæ, toties alternant, quot ſunt poſitivæ.

Sic in æquatione quadratica

$$xx - 5x + 6 = 0$$

cujus duæ ſunt poſitivæ radices 2, & 3, bis quoque alternant ſigna, ſeu contrario modo ſibi ſuccedunt.

Sic in æquatione cubica

$$x^3 - 12xx + 47x - 60 = 0$$

cujus tres ſunt poſitivæ radices nempe 3, 4, 5 ter quoque alternant ſigna.

At in æquatione $xx + 5x + 6 = 0$ cujus duæ ſunt negativæ radices nempe -2. & -3: bis idem ſignum ſibi ſuccedit.

Et in æquatione cubica

$$x^3 + 12xx + 47x + 60 = 0$$

cujus tres ſunt negativæ radices $-3, -4, -5$. ter ſibi ſuccedit ſignum $+$.

At in æquatione $xx + x - 6 = 0$ ubi duæ radices ſunt $2, -3$, ſemel ſignum ſibi ſuccedit, & ſemel alternat.

Hinc obtinetur methodus determinandi quot in data Æquatione ſunt negativæ radices, & quot poſitivæ.

Ut in æquatione $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$ quoniam duæ fiunt mutationes ſignorum de $+$ in $-$, & de $-$ in $+$; duæ erunt poſitivæ radices, & quoniam ſemel ſignum $-$ ſibi ſuccedit, una erit negativa.

Hæc regula extenditur ad quaſcunque Æquationes ex radicibus realibus compoſitas; exceptis Æquationibus, in quibus continentur radices imaginariæ.

5. Ex hac obſervatione Harrioti duæ aliæ obſervationes tanquam illius Corollaria deduci poſſunt.

Primo: quod radices poſitivæ Æquationis mutari poſſint in negativas; & e contra negativæ in poſitivas, mutando nempe ſigna in terminis quibuſcunque paribus æquationis, hoc eſt, ſecundo, quarto, ſexto, &c. ſignis immutatis in imparibus.

Ut

Ut ſi detur Æquatio

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

cujus tres ſunt poſitivæ radices 2, 3, 4. & una negativa − 5. ut ex ſucceſſione ſignorum, & reſolutione homogenei nempe − 120 patet. Si mutentur ſigna, ut præſcriptum eſt, fiet Æquatio

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$$

cujus tres ſunt radices negativæ − 2, − 3, − 4, & una poſitiva 5.

Secundo: cum datur Æquatio deficiens, cui deſit terminus aliquis, neceſſe eſt, ut dentur poſitivæ, & negativæ radices, quæ ſimul deſtruant aliquem terminum.

Et in ſpecie, cum deficit ſecundus terminus, neceſſe eſt, ut ſumma radicum negativarum æquetur ſummæ poſitivarum; cum tertius deficit, producta negativa ex binis æquentur productis poſitivis.

Si quartus, producta ternorum ſe deſtruent, & ſic de aliis. *Ut ex geneſi æquationum numero 3. Cap. hujus allata liquet.* Sic ſi ſit Æquatio

$$x^3 \ldots - 25x + 30 = 0$$

in qua radices ſunt 2, 3, − 5. Quoniam 2 + 3 − 5 ſe deſtruunt, hinc fit, ut deſit ſecundus terminus.

Et in æquatione univerſali

$$\begin{aligned} x^3 - axx &+ abx - abc = 0 \\ - bxx &- acx \\ + cxx &- bcx \end{aligned}$$

ſi $c = a + b$, evaneſcet ſecundus terminus; & ſi $ab = ac + bc$ evaneſcet tertius.

6. Cum in æquatione radices ſunt imaginariæ, illud notandum eſt primo; eas ſemper eſſe numero pares, hoc eſt, binas vel quaternas, &c. Nam alio mo-

 do

do contradictio, quæ per multiplicationem radicum inter ſe tolli debet, non evaneſceret, neque coeffi-cientes reales apparerent.

Sic in æquatione $xx - 4x + 10 = 0$ duæ radices ſunt imaginariæ; nempe $2 + \sqrt{-10}$; $2 - \sqrt{-10}$, quæ ſimul productæ dant Æquationem prædictam.

In æquatione $x + 6 = 0$ quatuor ſunt radices imaginariæ nempe $\sqrt{+\sqrt{-6}}, \sqrt{-\sqrt{-6}}$

$$-\sqrt{+\sqrt{-6}}, \sqrt{-\sqrt{-6}}$$

Ex quibus concludi poteſt, quod quælibet Æquatio, cujus gradus ſit par, poſſit quidem conſtare ex ſolis imaginariis; & conſequenter eſſe abſolute impoſſibilis.

At æquatio, cujus gradus ſit impar, debet ſemper continere unam ſaltem radicem realem, ac proinde ſemper eſt poſſibilis.

Illud notandum ſecundo: quod ubi dantur radices imaginariæ, illæ debent eſſe vel ambæ *puræ*, vel ambæ *mixtæ*. Puras vocamus, quæ ex ſola quantitate impoſſibili conſtant, ut: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$; Mixtas, quæ ex aggregato poſſibilium, & impoſſibilium; $1 + \sqrt{-2}$, $2 - \sqrt{-2}$.

Cum ſunt puræ, neceſſe eſt, ut ab utraque deſignetur eadem quantitas imaginaria, ab una nempe poſitive, ab altera negative.

Sic in æquatione $xx + 2 = 0$ una radix eſt $\sqrt{-2}$; altera $-\sqrt{-2}$

Cum vero ſunt mixtæ, neceſſe eſt, utramque habere eundem numerum, & eamdem quantitatem imiga-

imaginariam. Ita ſi ponantur $x = 3 + \sqrt{-4}$, & $x = 3 - \sqrt{-4}$ & multiplicentur hujusmodi quantitates inter ſe, evaneſcunt radicalia, & fiet Æquatio $xx - 6x + 13 = 0$

At, ſi alio quam prædicto modo ſumantur, non fient coefficientes rationales.

Ex quibus concluditur, quod ſi æquatio conſtet ex coefficientibus rationalibus, radices imaginariæ, ſi quas habet, prædictas conditiones habebunt.

6. Ut cognoſcatur quot ſint radices impoſſibiles in data Æquatione, hanc regulam ponit in Arithmetica ſua univerſali Newtonus.

Fiat Series fractionum, quorum denominatores ſunt numeri Seriei naturalis 1. 2. 3. 4. 5. &c. ad numerum usque progrediendo, qui eſt exponens poteſtatis incognitæ maximæ in data Æquatione; numeratores vero ſint ejusdem Seriei termini ordine inverſo, incipiendo nempe a numero poteſtatis maximæ usque ad unitatem. Dividatur unaquæque fractio poſterior per priorem, & collocentur fractiones prodeuntes ſuper terminis mediis æquationis. Si quadratum cujusque termini ductum in fractionem ſibi imminentem ſit majus, quam rectangulum terminorum utrinque exiſtentium, collocetur ſignum $+$, ſin minus, ſignum $-$.

Sub primo vero, & ultimo termino collocetur ſignum $+$. Totque erunt radices impoſſibiles, quot ſunt in ſubſcriptorum ſignorum Serie mutationes de $+$ in $-$, & de $-$ in $+$.

Sit exempli gratia Æquatio

$$x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$$

Fiat Series . $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$

 Et

Et diviſa ſecunda fractione per primam, tertia per ſecundam, collocentur prodeuntes fractiones ſuper terminis intermediis, hoc eſt, prima fractio ſuper termino ſecundo, ſecunda ſuper tertio, &c. ut ex figura liquet.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & + & pxx & + & 3ppx & - & q = 0 \\ + & & - & & + & & + \end{array}$$

Quoniam ergo quadratum ſecundi termini nempe ppx^4 ductum in iminentem fractionem $\frac{1}{3}$ dat $\frac{ppx^4}{3}$; quod minus, eſt quam rectangulum ex adjacentibus primo, & tertio, nempe $3ppx^4$, ponatur ſignum $-$ ſub ſecundo termino. At quia tertii termini quadratum $9p^4xx$ ductum in ſibi imminentem fractionem dat $\frac{9p^4xx}{3}$ ſeu $3p^4xx$, quod majus eſt, quam rectangulum $-pqxx$ ex ſuis adjacentibus, collocetur ſub ipſo ſignum $+$. Sub primo vero, & ultimo collocetur $+$, & quoniam duæ ſunt mutationes in ſignis, duæ quoque erunt radices impoſſibiles.

Sic Æquatio

$$\begin{array}{cccc} x^3 - & 4xx + & 4x - & 6 = 0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

poſitis ſecundum regulam prædictam fractionibus, & ex his deductis ſignis, reperietur habere duas radices impoſſibiles.

Si Æquatio ſit deficiens, ut

$$\begin{array}{cccccccc} x^7 - & 2x^6 & + 3x^5 - & 2x^4 & + x^3 & \ldots\ldots - & 3 = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + + \end{array}$$

ponantur in locis terminorum deficientium ſigna alterna,

na, ſed ſub homogeneo ſit ſemper +. Et quoniam ſex ſunt ſignorum mutationes, ſex habebit radices impoſſibiles.

Sed cum quidam ſint caſus, in quibus hæc regula fallit, aliam regulam ſubſtituit clariſſimus J. Campbellius in Appendice ejusdem Arithmeticæ. Scilicet; elevetur binomium ad potentiam ejusdem gradus, cujus eſt Æquatio, & ſumantur terminorum coefficientes unitate mulctati. Quilibet coefficiens ſic diminutus dividatur per ipſummet duplicatum; a numeratore item auferatur unitas, & fractiones prodeuntes collocentur ſupra terminos intermedios Æquationis. Quod ſi quadratum cujusvis termini ductum in ſuper imminentem fractionem majus ſit, quam rectangulum ex terminis immediate adjacentibus — rectangulo ex proxime utrinque jacentibus + rectangulo ex proxime ſequentibus, tunc ſignum + ponatur ſub ipſo termino; ſecus ſignum —. Et ſub primo & ultimo ponatur ſemper +. Et tot erunt radices impoſſibiles, quot erunt mutationes ſignorum.

Sit ergo Æquatio

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10xx - 28x + 24 = 0$$

Coefficientes terminorum binomii ad ſeptimam potentiam elevati ſunt 8, 22, 36, 36, 22. 8, erunt ergo fractiones ſuper imminentes per prius dicta, ſimulque ad minores terminos reductæ ut in figura

	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$		$\frac{17}{35}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{10}{21}$			
x^7	$-5x^6$	$+15x^5$		$-23x^4$	$+18x^3$	$+10xx$	$-28x$	$+24$	$=0$
+	−	+	$\frac{3}{7}$	+	+	−	+	+	

Et quia quadratum ſecundi termini ductum in ſuper imminentem fractionem $\frac{3}{7}$ das $\frac{75x^{12}}{49}$, quod minus eſt, quam rectangulum ex adjacentibus nempe $15x^{12}$, ponatur ſignum − ſub ſecundo termino. At quia quadratum tertii multiplicatum per ſuper imminentem fractionem $\frac{10}{21}$ majus eſt, quam rectangulum ex ſecundo, & quarto imminutum rectangulo ex primo & quinto, ponatur ſignum +. Et quoniam quadratum quarti termini ductum in ſuper imminentem fractionem minus eſt, quam rectangulum ex adjacentibus + rectangulo ex tertiis, ponatur ſignum − ; & ſic procedendo erunt ſigna, ut in figura; in quibus cum ſex ſint mutationes, ſex quoque erunt in Æquatione data radices impoſſibiles; quæ ſunt.

$1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$, $1 + \sqrt{-2}$.
$1 - \sqrt{-2}$, $1 + \sqrt{-1}$, $1 - \sqrt{-1}$.

Septima vero eſt rationalis, & eſt − 1.

Quod ſi radices inveniendæ eſſent per regulam Newtonianam, invenirentur duæ tantum mutationes, atque adeo duæ tantum indicarentur radices imaginariæ.

Demonſtrationem regulæ Campellianæ ad ipſum Auctorem remittimus, utpote quæ longo nimis, & implicato nititur obſervationum apparatui.

Interim notabimus: problema hujusmodi, quod ex regulis Arithmeticæ vix enodari poteſt, ex Geometricis facile reperiri. Conſtructa enim Æquatione per figuras, exhibentur oculis ipſæ radices reales, & ſimul denotantur imaginariæ, quæ tamen non ſunt præſentis inſtituti.

CA-

Digitized by Google

CAPUT II.

De Tranſmutationibus Æquationum.

ANtequam reſolvatur Æquatio data, expedit interdum illam transmutare in aliam, quæ ſit ſimplicior, & aptior; quarum transmutationum methodus nunc inquirenda erit.

PROBLEMA I.

Augere, vel minuere radices quantitate data.

SIt Æquatio $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ & transmutanda ſit in aliam, cujus radices ſuperent radices Æquationis datæ ternario numero.

Fiat $y = x + 3$

Et erit $x = y - 3$

Quare ſubſtit: erit $x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$

$$- 9xx = - 9yy + 54y - 81$$

$$+ 26x = + 26y - 78$$

$$- 24 = - 24$$

ex quibus additis fit nova Æquatio

$$y^3 - 18yy + 107y - 210 = 0$$

Radices Æquationis datæ de x^3 erant 2, 3, 4. Radices novæ Æquationis ſunt 5, 6, 7, quarum quælibet ſibi correſpondentem ternario ſuperat.

Sit ſecundo Æquatio

$$x^3 - 12xx + 47x - 60 = 0$$

cujus radices ſunt 3, 4, 5. ſitque invenienda alia, cujus radices ſint diminutæ binario

Fiat $x - 2 = y$

Et erit $x = y + 2$

$$\text{Quare } x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$$
$$-12xx = -12yy - 48y - 48$$
$$+47x = +47y + 94$$
$$-60 = -60$$

Et fiet nova Æquatio

$$y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$$

cujus radices ſunt 1, 2, 3. Eodem modo radices augeri poterunt, vel minui quantitate quacunque a.

Ex quibus facile colligitur, poſſe ita augeri radices, ut quæcunque negativa tranſeat in poſitivam. Nam ſi in data Æquatione radices ſunt $-3, -4, -10$, augendo illas numero 20. fiet nova Æquatio, cujus radices erunt 17, 16, 20.

E contra: poſſunt quoque ita minui, ut radices in Æquatione nova evadant negativæ.

Ut, ſi in Æquatione data ſunt radices 17, 16, 20, & minuantur numero 20, fiet nova Æquatio, cujus radices erunt $-3, -4, -10$.

COROLLARIUM.

1. Cum radices augentur, quæ erant poſitivæ, fiunt poſitivæ majores; quæ vero erant negativæ, fiunt negativæ minores, & ſæpe tranſeunt in poſitivas, ut ex additione Algebraica liquet.

2. E contra: cum minuuntur, poſitivæ decreſcunt, & poſſunt fieri negativæ, ſed negativæ augentur.

3. Si nova Æquatio habet ſigna alterna, ac proinde omnes radices poſitivas, id argumento eſt, quantitatem aſſumptam majorem eſſe qualibet negativa; ipſas enim mutavit in poſitivas.

4. E

4. E contra: ſi Æquatio nova habeat omnia ſigna ſimilia, ac proinde omnes radices negativas, id argumento eſt, radices poſitivas Æquationis datæ imminutas fuiſſe quantitate, quæ eſt quacunque ex illis major.

PROBLEMA II.

Data æquatione aliam invenire, ita ut radices primæ, & ſecundæ binæ quævis faciant quantitatem datam.

SIt data æquatio $x^3 \ldots + 4x - 8 = 0$ & invenienda ſit Æquatio, cujus radices, additæ radicibus æquationis datæ, binæ quævis ſimul faciant 10.

Fiat $10 = x + y$

Et erit $x = 10 - y$

Quare $x^3 = 1000 - 300y + 30yy - y^3$

$+ 4x = 40 - 4y$

$- 8 = - 8$

Erit ergo $y^3 - 30yy + 304y - 1032$.

Univerſaliter.

Sit $x^3 \ldots - px + q = 0$

Et invenienda ſit Æquatio, in qua $a = x + y$

Erit ergo $x = a - y$;

Quare $x^3 = a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$

$- px = - ap + py$

$+ q = + q$

Fiet ergo
$$\begin{array}{l} y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 \\ \qquad\quad - py + ap = 0 \\ \qquad\qquad\quad - q \end{array}$$

COROLLARIUM I.

Cum ſit $a = x + y$
Erit etiam $a - x = y$
Igitur ſi quantitas a ſit quacunque poſitiva radice major, y erit ſemper poſitiva, & fiet Æquatio, cujus omnes radices erunt poſitivæ.

COROLLARIUM II.

Si quantitas a major eſt quam quisque coefficiens negativus Æquationis datæ, in nova Æquatione erunt omnes radices poſitivæ.

Sit enim Æquatio $x^3 - px - qx - r = 0$
Et fiat $a - y = x$
ut ſit nova Æquatio

$$\begin{array}{llll} y^3 & - 3ayy & + 3aay & - a^3 \\ & + pyy & - 2apy & + aap = 0 \\ & & - qy & + aq \\ & & & + r \end{array}$$

Si maximus coefficiens Æquationis datæ ponatur p, quoniam a major eſt quam p ex conſtructione, erit $3a$ major p. Quare $- 3a + p$ erit negativa quantitas. In tertio vero termino ſi loco p ponatur $a - 1$, & loco q, $a - 2$; fiet coefficiens $3aa - 2aa + a + 2$; nempe poſitiva quantitas. In homogeneo vero fiet $- 2a + r$. Cumque $2a$ ſit major r, erit adeo homogeneus negativa quantitas.

Signa igitur in Æquatione erunt alterna, & proinde nonniſi ex poſitivis radicibus componetur.

CO-

COROLLARIUM III.

DAta ergo Æquatione efformari poterit alia, cujus omnes radices ſunt poſitivæ, ſi coefficiens maximus negativus augeatur unitate, & illi æquetur ſumma radicum.

Sic ſi detur $xx + x - 6 = 0$ & conſtruenda ſit nova Æquatio, cujus radices ſint omnes poſitivæ, fiat $7 - x = y$ ſeu $7 - y = x$

Et erit $yy - 15y + 50 = 0$

PROBLEMA IV.

Multiplicare, & dividere radices per quantitatem datam.

SIt Æquatio $xx - 5x + 6 = 0$ cujus radices ſunt 2, 3. & invenienda ſit Æquatio, cujus radices ſunt illarum quadruplæ.

Fiat $4x = y$

Et erit $x = \frac{y}{4}$

Conſequenter $xx = \frac{yy}{16}$

$$- 5x = - \frac{5y}{4}$$

$$+ 6 = + 6$$

Et ſit nova Æquatio

$$\frac{yy}{16} - \frac{5y}{4} + 6 = 0$$

Ex qua tollendo fractiones per reductionem, & omittendo denominatorem communem;

Erit $yy - 20y + 96 = 0$
cujus radices ſunt 8 & 12, quadruplæ de 2 & 3 prioris Æquationis.

Univerſaliter.

Sit æquatio $xx \begin{matrix} - ax \\ - bx \end{matrix} + ab = 0$

Cujus radices ſunt a, & b

Et multiplicandæ ſint per m

Erit ergo $x = \frac{y}{m}$

Et fiet Æquatio

$$yy \begin{matrix} - amy \\ - bmy \end{matrix} + abmm = 0$$

Procedendo eadem methodo in altioribus Æquationibus emergit Regula ſequens: ut multiplicentur ordine termini Æquationis datæ per poteſtates numeri multiplicantis, ita ut primus terminus multiplicetur per potentiam nullam, id eſt, per unitatem, ſecundus per potentiam primam, tertius per ſecundam, & ſic porro usque ad homogeneum, ſicque habebitur quæſita Æquatio.

Sic ſi detur $x^4 - 4xxx + 5xx - 6x + 4 = 0$ & quæratur Æquatio, cujus radices ſint decuplæ illarum, multiplicentur termini per 1, 10, 100, 1000, 10000. habebiturque Æquatio ſequens.

$y^4 - 40y^3 + 500yy - 6000y + 40000 = 0$

Quod ſi vero dividendæ ſint radices per quantitatem datam m, hac methodo præcedendum erit:

Sit

Sit Æquatio data $\left.\begin{array}{l}xx - ax + ab = 0\\ \quad\ - bx\end{array}\right.$

Et fiat $y = \frac{x}{m}$

Erit ergo $my = x$
Unde habetur nova Æquatio
$\left.\begin{array}{l}m^2y^2 - amy + ab\\ \qquad\ - bmy\end{array}\right.$
Seu dividendo per m^2
$yy - \frac{ay}{m} - \frac{by}{m} + \frac{ab}{mm} = 0$

Quod ad altiores æquationes applicando cognoſcitur, terminos dividendos eſſe per poteſtates m ordinatim usque ad homogeneum ſumptas.

Sic ſi detur Æquatio
$x^4 - 4x^3 + 6xx - 4x + 6 = 0$
Et dividendæ ſint radices per 10, fiet nova Æquatio quæſita.
$\frac{y^4}{1.} - \frac{4y^3}{10.} + \frac{6yy}{100.} - \frac{4y}{1000.} + \frac{6}{10000.} = 0$

COROLLARIUM I.

Utilis eſt interdum hujusmodi transformatio, ut ad ſimpliciorem formam reducatur Æquatio, maxime cum in æquatione data fracti occurrunt, qui per hanc transformationem tolluntur.

Sit enim $x^3 - 4xx + 5x + \frac{1}{8} = 0$

Multi-

Multiplicentur termini per 1, 2, 4, 8, & prodibit nova Æquatio

$y^3 - 8yy + 20y + 1 = 0$

Cujus radices ſunt duplæ radicum datæ Æquationis.

Similiter ſit $x^3 - 4x^2 + \frac{3x}{16} - 40 = 0$

Multiplicentur termini per 1, 4, 16, 64.

Et fiet Æquatio

$y^3 - 16yy + 3y - 2560 = 0$

cujus radices ſunt quadruplæ.

Hac quoque methodo quantitates irrationales, & radicales tolluntur.

Sit enim $xx + x\,2\sqrt{} - 6 = 0$ multiplicentur termini per poteſtates, nempe per $\sqrt{2}$ ſecundus, per quadratum de $\sqrt{2}$ nempe per 2 tertius, & fiet Æquatio. $yy + 2y - 12 = 0$

cujus radices ſunt ad radices Æquationis datæ, ut $\sqrt{2} : 1$.

Similiter ſi ſit Æquatio

$x^3 - x^2\sqrt{3} - 10x + 3\sqrt{3} = 0$

Multiplicentur termini per

$1,\ \sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3}$

Et fiet nova Æquatio

$y^3 - 3yy - 30y + 27 = 0$

cujus radices ſunt ad ſupradictas ut $\sqrt{3} : 1$.

COROLLARIUM II.

POteſt quoque hoc methodo inveniri Æquatio, cujus coefficiens ſit minor coefficiente homologo datæ Æquationis.

Sit

Sit enim $x^3 - 40xx + 48x - 100 = 0$
& quæratur nova, in qua tertius terminus ſit minor.

Quoniam ergo 48 exacte dividitur per quadratum 16, dividantur termini per Seriem 1, 4, 16, 64, & erit nova Æquatio

$$y^3 - 10yy + 3y - \frac{100}{64} = 0$$

cujus radices ſunt quarta pars datarum.

Similiter ſit $x^3 - 60xx + 36x - 270 = 0$
Et quæratur alia, in qua homogeneus ſit minor.
Dividantur termini per 1, 3, 9, 27. Et erit nova Æquatio

$$y^3 - 20yy + 4y - 10 = 0$$

PROBLEMA V.

Data Æquatione aliam invenire, cujus radices multiplicatæ per radices primæ Æquationis faciant quantitatem datam.

Sit $xx - 5x + 6 = 0$ & oporteat invenire novam Æquationem, cujus radices per illas multiplicatæ faciant 12.

Fiat $xy = 12$
Et erit $x = \frac{12}{y}$

Unde per ſubſtitutionem & reductionem fiet nova Æquatio

$$yy - 10y + 24 = 0$$

ſunt autem radices prioris 2 & 3, poſterioris 6 & 4, quæ quærebantur.

PROBLEMA VI.

INvenire Æquationem, cujus radices ſint reciprocæ aliarum radicum.

Sit $xx - 5x + 6 = 0$

& oporteat invenire reciprocas.

Fiat $\frac{1}{x} = y$

Et erit $x = \frac{1}{y}$

Ex quo per ſubſtitutionem, & reductionem fit

$yy - \frac{5y}{6} + \frac{1}{6} = 0$

PROBLEMA VII.

DAta Æquatione aliam conſtruere, cujus radices æquantur illarum poteſtatibus.

Sit $x^4 - 6xx + 16 = 0$

& oportet novam conſtruere, cujus radices æquantur illarum quadrato.

Fiat $xx = y$

Et erit $yy - 6y + 16 = 0$

Sit ſecundo $x^6 - 8x^3 + 9 = 0$

& debeant haberi radices æquales cubo.

Fiat $x^3 = y$

Et erit $yy - 8y + 9 = 0$

& viciſſim transformari poſſunt datæ æquationes in alias, quarum radices ſunt ſubduplicatæ &c. priorum æquationum, ſi nempe fiat $x = y^2$ vel $x = y^3$. &c.

PRO-

PROBLEMA VIII.

EX Æquatione data tollere terminos.

Sit Æquatio univerſalis

$$xx - ax + b = 0$$

& conſtruenda ſit alia, cui deſit ſecundus terminus.

Fiat $x = y + m$

& prodibit Æquatio

$$\begin{array}{l} yy + 2my + mm \\ \quad - ay - am = 0 \\ \qquad + b \end{array}$$

Oportet autem tollere ſecundum terminum. Igitur *per num. 5. cap. I. hujus*, debet eſſe $2m - a = 0$

Atque adeo $m = \frac{a}{2}$

Si Æquatio data ſit cubica, erit $m = \frac{a}{3}$; ſi biquadratica $\frac{a}{4}$, & ſic porro. Atque hinc Carteſii Regula prodivit: ut dividatur coefficiens datæ per exponentem maximæ poteſtatis, & tali quantitate imminuantur radices.

Eadem methodo deducitur regula ad tollendos alios terminos.

Ut ſi detur Æquatio

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

Fiat $x = y + m$

Et erit $\begin{array}{l} y^3 + 3myy + 3mmy + m^3 \\ \quad - pyy - 2pmy - pmm \\ \qquad + qy + qm \\ \qquad\qquad - r \end{array}$

 Ut

PROBLEMA VI.

INvenire Æquationem, cujus radices ſint reciprocæ aliarum radicum.

Sit $xx - 5x + 6 = 0$

& oporteat invenire reciprocas.

Fiat $\frac{1}{x} = y$

Et erit $x = \frac{1}{y}$

Ex quo per ſubſtitutionem, & reductionem fit

$$yy - \frac{5y}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

PROBLEMA VII.

DAta Æquatione aliam conſtruere, cujus radices æquantur illarum poteſtatibus.

Sit $x^4 - 6xx + 16 = 0$

& oportet novam conſtruere, cujus radices æquantur illarum quadrato.

Fiat $xx = y$

Et erit $yy - 6y + 16 = 0$

Sit ſecundo $x^6 - 8x^3 + 9 = 0$

& debeant haberi radices æquales cubo.

Fiat $x^3 = y$

Et erit $yy - 8y + 9 = 0$

& viciſſim transformari poſſunt datæ æquationes in alias, quarum radices ſunt ſubduplicatæ &c. priorum æquationum, ſi nempe fiat $x = y^2$ vel $x = y^3$. &c.

PRO-

PROBLEMA VIII.

Ex Æquatione data tollere terminos.

Sit Æquatio univerſalis

$$xx - ax + b = 0$$

& conſtruenda ſit alia, cui deſit ſecundus terminus.

Fiat $x = y + m$

& prodibit Æquatio

$$\begin{array}{l} yy + 2my + mm \\ \quad - ay - am = 0 \\ \qquad + b \end{array}$$

Oportet autem tollere ſecundum terminum. Igitur *per num. 5. cap. I. hujus*, debet eſſe $2m - a = 0$

Atque adeo $m = \frac{a}{2}$

Si Æquatio data ſit cubica, erit $m = \frac{a}{3}$; ſi biquadratica $\frac{a}{4}$, & ſic porro. Atque hinc Carteſii Regula prodivit: ut dividatur coefficiens datæ per exponentem maximæ poteſtatis, & tali quantitate imminuantur radices.

Eadem methodo deducitur regula ad tollendos alios terminos.

Ut ſi detur Æquatio

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

Fiat $x = y + m$

Et erit
$$\begin{array}{rrrr} y^3 + & 3myy + & 3mmy + & m^3 \\ - & pyy - & 2pmy - & pmm \\ & + & qy + & qm \\ & & - & r \end{array}$$

 Ut

Ut tollatur tertius terminus, neceſſe eſt, ut *vi numeri* 5. *cap. I. huj.* ſit $3mm - 2pm + q = 0$

Quod ſi $p = 6$, $q = 9$; fiet

Æquatio $3mm - 12m + 9 = 0$

Seu divid. per 3 erit $mm - 4m + 3 = 0$

Qua reſoluta per completionem quadrati, de qua capite ſequente, invenitur $m = 3$, vel 1.

Ponendum ergo erit $x = y + 1$ vel $x = y + 3$; & utroque modo fiet nova Æquatio tertii termini expers.

Quemadmodum autem ad tollendum ſecundum terminum reſolvenda eſt Æquatio ſimplex, & ad tertium quadratica, ita ad tollendum quartum cubica, ad quintum biquadratica, & ſic procedendo; ex quibus fit, ut eo problematis ſolutio evadat difficilior, quo termini Homogeneo termino propiores tollendi ſunt.

CAPUT III.

De reſolutione generali Æquationum ſecundi gradus.

CUm homogenei diviſores vel poſitive, vel negative ſumpti, & loco incognitæ ſubſtituti terminos Æquationis ad nihilum non redigunt, id argumento eſt, radices non eſſe rationales. Ad alias ergo neceſſe fuit animum intendere methodos, easque generales, quibus tam rationales, quam irrationales radicis extrahi poſſent, & tam reales, quam imaginariæ facile cognoſcerentur.

Hoc adeo capite de reſolutione æquationum quadraticarum agetur, in ſequentibus vero de cubicis, biquadratis &c.

Redu-

Reducuntur autem Æquationes omnes quadraticæ ad quatuor haſce univerſales ſpecies.

I.	xx	$-$	$2ax$	$+$	b	$=$	0
II.	xx	$-$	$2ax$	$-$	b	$=$	0
III.	xx	$+$	$2ax$	$+$	b	$=$	0
IV.	xx	$+$	$2ax$	$-$	b	$=$	0

ad quarum radices extrahendas una, eademque inſervit methodus.

Sit ergo prima Æquatio

$$xx - 2ax + b = 0$$

Et erit $xx - 2ax = - b$

Et quoniam quadratum binomii completum conſtat ex quadrato primi termini, & quadrato ſecundi, duploque rectangulo primi, & ſecundi; quælibet æquatio quadratica incompleta, cui deſit quadratum ſecundæ partis radicis, compleri poteſt ſequente generali methodo: cum ſecundus terminus ſit duplum rectangulum ex prima, & ſecunda radice Æquationis datæ accipiatur ſemicoefficiens ſecundi termini, ex eoque fiat quadratum, hoc utrique parti æquationis additum, quadratum efficit completum.

Sic quoniam in hac $xx - 2ax = - b$ deeſt quadratum ſecundæ partis, ſi ex ſemicoefficiente ſecundi termini $- 2ax$ nempe a fiat quadratum aa, & utrique parti addatur,

Habebitur $xx - 2ax + aa = aa - b$ quadratum completum. Unde extracta radice quadrata ex parte utraque æquationis habebitur $x - a = \pm (\sqrt{aa - b})$

Et conſequenter transponendo a erit $x = a \mp (\sqrt{aa - b})$

 Signa

Signa $\mp$ ante radicem poſita, denotant radicem ſequentem eſſe poſſe vel negativam, vel poſitivam, pro ratione quantitatis a

Eodem modo determinatur valor radicum in aliis formulis, & erunt:

I.	x	$=$		a	$\mp$	$(\sqrt{aa - b})$
II.	x	$=$		a	$\mp$	$(\sqrt{aa \pm b})$
III.	x	$=$	$-$	a	$\mp$	$(\sqrt{aa - b})$
IV.	x	$=$	$-$	a	$\mp$	$(\sqrt{aa \pm b})$

Neque opus eſt, ut in Æquatione quadratica complenda coefficiens literalis ſecundi termini affectus ſit numero binario, ut affectus eſt in allatis exemplis; ſed perinde eſt, ſeu ſit affectus quocunque numero integro, aut fracto, ſeu nullo, ſive habeat coefficientem literalem cum numerico, ſeu numericum tantum, modo pro complendo quadrato accipiatur dimidius coefficiens, & ex eo factum quadratum, utrique parti addatur, ut ſequentia exempla declarant.

1. Sit $xx + 4ax = c$

Erit dimidius coefficiens ſecundi termini $\frac{4a}{2}$, ſeu $2a$, & illius quadratum $4aa$, quod utriqui parti additum, facit quadratum completum $xx + 4ax + 4aa = c + 4aa$

Extracta radix erit $x + 2a = (\sqrt{c + 4aa}.)$

2. Sit $xx - 5ax = c$

Erit dimidius coefficiens $-\frac{5a}{2}$, & illius quadra-

tum

tum $+\frac{25aa}{4}$, & hinc quadratum completum $xx - 5ax + \frac{25aa}{4} = c + \frac{25aa}{4}$

Extracta radix $x - \frac{5a}{2} = (\sqrt{c + \frac{25aa}{4}})$

3. Sit $xx - ax = c$

Erit dimidius coefficiens $-\frac{a}{2}$, & illius quadratum $+\frac{aa}{4}$

Quadratum completum $xx - ax + \frac{aa}{4} = c + \frac{aa}{4}$

Extracta radix $x - \frac{a}{2} = (\sqrt{c + \frac{aa}{4}})$

4. Sit $xx - \frac{a}{2}x = c$

Erit dimidius coefficiens $\frac{a}{4}$, & illius quadratum $+\frac{aa}{16}$.

Quadratum completum $xx - \frac{ax}{2} + \frac{aa}{16} = c + \frac{aa}{16}$

Extracta radix $x - \frac{a}{4} = (\sqrt{c + \frac{aa}{16}})$

Idem eſt de aliis quibuscunque quomodolibet affectis coefficientibus

Eſt autem maxime neceſſaria dicta methodus complendi quadratum, ut ſolam incognitam x reperire poſſimus, ut infra exemplis pluribus manifeſtum fiet.

COROLLARIUM I.

Ex primis quatuor formulis numeris I. II. III. IV. ſignatis perſpicuum eſt, univerſaliter exprimi radices ſive ſint reales, ſive imaginariæ, ſive rationales, ſive irrationales.

. Sit enim quantitas $aa - b$ in prima formula quadratum perfectum, erit tunc radix rationalis. At ſi quadratum non ſit perfectum, erit irrationalis.

Rurſus ſit aa major quam b, radix erit realis; at ſi aa minor quam b, tum radix erit imaginaria.

Idem eſto de formula tertia. Sed cum in ſecunda, & quarta $aa + b$ ſemper ſit poſitiva quantitas, radices æquationum ad hujuscemodi formulas pertinentium, numquam erunt imaginariæ, ſed ſemper reales.

Sit ergo Æquatio $xx - 5x + 6 = 0$ quæ ad primam reducitur ſpeciem, & erit $2a = 5$, $b = 6$

Et complendo Quadratum per ante dicta

Erit $xx - \frac{5x}{2} + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$

Et $x - \frac{5}{2} = (\sqrt{-6 + \frac{25}{4}})$

Igitur $x = \frac{5}{2} \mp (\sqrt{-6 + \frac{25}{4}})$

Seu reducendo radicem $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ vel $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

Erit

Erit ergo x vel 2. vel 3.

At ſi habeatur $xx - 5x + 8 = 0$

Reperietur complendo quadratum $x = \frac{5}{2} \pm (\sqrt{\frac{25}{4}} - 8)$ cujus radices ſunt imaginariæ.

Sit ſecundo Æquatio.

$x^2 + 5x + 6 = 0$

quæ tertiæ eſt ſpeciei, & erit

$2a = 5, b = 6$

Reperitur eadem methodo $x = -\frac{5}{2} \pm (\sqrt{\frac{25}{4}} - 6)$

erunt ergo radices $-2. -3.$ quod ſi loco 6 ponatur 8 erunt radices imaginariæ.

Sit vero $xx - 8x - 10 = 0$ quæ ad ſecundam formulam ſpectat; & erit $2a = 8, b = 10$

Reperietur $x = 4 \pm \sqrt{26}$, cujus radices ſunt irrationales. Sed ſi in homogeneo inveniretur -20; tum radices eſſent rationales, nempe 10. vel -2.

Sit denique $xx + 8x - 10 = 0$ quæ ad quartam formulam pertinet, & erit $2a = 8, b = 10$.

Erit igitur $x = -4 \pm \sqrt{26}$, cujus radices erunt radices irrationales.

Quod ſi loco -10 ſit homogeneus -20, tum fient rationales, & erunt vel 2. vel -10.

Poſſunt quoque ſpecies radicum ex ſucceſſione, vel alternatione ſignorum determinari, ut *Cap. I. dictum eſt.*

COROLLARIUM. II.

Methodus reſolvendi æquationes quadraticas ducit interdum ad reſolutionem Æquationum altiorum, quæ ad quadraticas reducuntur.

Sit enim $x^3 - 5xx + 6 = 0$
Si fiat $xx = y$
Erit nova Æquatio quadratica
$yy - 5y + 6 = 0$
Cujus radices ſunt 2. vel 3.

Quoniam ergo $xx = y$
Erit $x = \pm \sqrt{y}$.

Quare datæ Æquationis radices erunt
$\pm \sqrt{2}$ & $\pm \sqrt{3}$
Eodem modo ſi ſit $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$
Fiat $x^3 = y$
Et erit $yy - 5y + 6 = 0$
Cujus radices pariter ſunt 2, & 3.

Erit ergo $x^3 = 2$, vel $x^3 = 3$
Quare $x = \sqrt[3]{2}$; vel $x = \sqrt[3]{3}$
Et quoniam $\sqrt[3]{2}$ triplum, ut ſuo loco videbimus valorem habet, & triplum pariter $\sqrt[3]{3}$ ſex quoque determinabuntur propoſitæ Æquationis radices.

Hujuscemodi Æquationes, quæ ad quadraticam reducuntur, *ſecundi gradus Derivativa* vocantur; & omnes ſub hac formula generali contineri poſſunt

$$x^{2m} + px^{m} + q = 0$$

Ubi

Ubi m ſignificat exponentem quemcunque, & in qua nulla habetur ratio ſignorum, quibus termini afficiuntur.

Ponatur enim $x^{2m} = y^2$ erit $x^m = y$, habebitur Æquatio ſecundi gradus, ſeu quadratica, $y^2 + py + p = 0$.

Itaque methodus generalis ſolvendi Æquationes derivativas ſecundi gradus, hæc eſt: transformetur primo Æquatio data in aliam ſecundi gradus per ſubſtitutionem alterius incognitæ, reperiantur dein huius Æquationes radices, tum ex his radicibus ea rurſus radix extrahatur, quam deſignat poteſtas incognitæ, loco cujus altera ſubſtituta fuerat, ſicque datæ Æquationis radices reperientur.

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis.

PROBLEMA I.

Reſolvere Æquationes Cubicas puras.

ÆQuationes Cubicæ *puræ* dicuntur, ſi ſecundo & tertio termino carent, & ad duas ſpecies reducuntur.

1. $x^3 - p = 0$
2. $x^3 + p = 0$

quarum utraque eadem methodo reſolvetur.

Quoniam enim in prima

$x^3 - p = 0$

Erit $x^3 = p$

Et conſequenter $x = \sqrt[3]{p}$

Sic

Sic in ſecunda $x = \sqrt[3]{-p}$

Verum cum omnis Æquatio tot habere poſſit radices, quot in ea maxima incognitæ poteſtas habet dimenſiones, & non plures, *ut ex ante dictis liquet*, habebit utraque illarum formularum præter inventam radicem, duas alias, cum in illis incognita x ad tres dimenſiones aſſurgat. Hinc qua ratione duæ illæ reperiantur nunc oſtendetur: id quod diviſione obtinetur nempe: ſi una quæque formula dividatur per Æquationem ſimplicem inventam ſuam radicem continentem; ſic enim deprimetur ad aliam ſecundi gradus, cujus duæ radices dabunt radices quæſitas.

Ponatur ergo $\sqrt[3]{p} = a$, conſequenter $p = a^3$

Et erit $x^3 - a^3 = 0$

Atque adeo $x = a$ ſeu $x - a = 0$

Diviſa ergo Æquatione cubica $x^3 - a^3$ per $x - a$; prodibit æquatio quadratica.

$$xx + ax + aa = 0$$

Erit $xx + ax = - aa$

Cujus radices jam reductæ ſunt

$$x = + \left(\sqrt{-\frac{3aa}{4}}\right) - \frac{a}{2}$$

$$x = - \left(\sqrt{-\frac{3aa}{4}}\right) - \frac{a}{2}$$

quarum utraque eſt imaginaria.

Eodem modo radices alterius Æquationis invenientur.

In

In qua erit $p = - a^3$, & conſequenter

$x^3 + a^3 = 0$

Et $x = - a$ ſeu $x + a = 0$.

Diviſa ergo Æquatione cubica $x^3 + a^3$ per $x + a$; prodibit Æquatio quadratica

$x^2 - ax + aa = 0$

Et erit $x^2 - ax = - aa$

Cujus radices ſunt

$$x = + \left(\sqrt{-\frac{3aa}{4}}\right) + \frac{a}{2}$$

$$x = - \left(\sqrt{-\frac{3aa}{4}}\right) + \frac{a}{2}$$

Quarum utraque item imaginaria eſt.

PROBLEMA II.

Reſolvere Æquationes Cubicas ſecundo tantum termino carentes, in quibus radix aliqua eſt rationalis.

Quælibet Æquatio Cubica, cui deeſt ſecundus terminus ad quatuor ſpecies reduci poteſt.

I. $x^3 + 3px + 2q = 0$
II. $x^3 + 3px - 2q = 0$
III. $x^3 - 3px - 2q = 0$
IV. $x^3 - 3px + 2q = 0$

quæ tamen compendii gratia ad unam poſſunt reduci

$x^3 + 3px + 2q = 0$

Ut autem reſolvatur hujusmodi Æquatio illud primo advertendum: quod in Æquatione Cubica, cui deeſt ſecundus terminus vel duæ radices ſunt poſitivæ, & tertia negativa æqualis illarum ſummæ, vel duæ

duæ ſunt negativæ, & tertia poſitiva æqualis pariter illarum ſummæ.

2. Duæ radices ſive ſint poſitivæ ſive negativæ, poſſunt eſſe æquales, vel inæquales.

3. Vel omnes ſunt reales, vel una tantum realis, & reliquæ imaginariæ.

4. Quæ reales ſunt vel ſunt rationales, vel irrationales, quæ omnia erunt determinanda.

Et primo ponatur duas Æquationis propoſitæ radices eſſe poſitivas, & tertiam, ſive quod idem eſt earum ſummam eſſe negativam.

Ponatur ergo prima radix $x = a + b$, ſecunda $x = a - b$ (ſupponendo a majorem quam b), & erit tertia $x = -2a$. Erunt ergo Æquationes ſimplices $x - a - b = 0$

$x - a + b = 0$, $x + 2a = 0$

quæ inter ſe multiplicatæ dant Æquationem Cubicam

$$\text{A} \qquad \begin{array}{l} x^3 - 3aax + 2a^3 = 0 \\ \qquad - bbx - 2abb \end{array}$$

Sint ſecundo duæ negativæ, & tertia Illis æqualis poſitiva. Erunt adeo æquationes componentes ſimplices $x + a + b = 0$, $x + a - b = 0$

$x - 2a = 0$, & fit Æquatio

$$\text{B} \qquad \begin{array}{l} x^3 - 3aax - 2a^3 = 0 \\ \qquad - bbx + 2aab \end{array}$$

ubi notari poteſt in utraque Æquatione tertium terminum nempe $3aax$ eſſe ſemper negativum, cum ex hypotheſi a ſit majus quam b; ex quo inferri poteſt; quod ſi detur Æquatio Cubica, cui deſit ſecundus terminus, & tertius vel ſit poſitivus vel zerus ſeu nihilum, radices ejus non erunt omnes reales, ſed una realis erit, & reliquæ imaginariæ.

Si coefficientes Æquationis A cum coefficientibus Æquationis generalis quartæ ſpeciei $x^3 - 3px$ $+ 2q = 0$ conferantur

Erit $-3p = -3aa - bb$
Seu tranſponendo $3p = 3aa + bb$
Et $2q = 2a^3 - 2abb$
Conſequenter $p = aa + \frac{bb}{3}$

Et $q = a^3 - abb$
Ergo elevando primam ad cubum
Fiet $p^3 = a^5 + a^4bb + \frac{aab^4}{3} + \frac{b^6}{27}$

Et pariter elevando ſecundam ad quadratum
Erit $qq = a^6 - 2a^4bb + aab^4$

Ergo ſubtrahendo erit
$p^3 - qq = 3a^4bb - \frac{2aab^4}{3} + \frac{b^6}{27}$

Quæ æquatio invenitur quoque ex æquatione B. Ex quibus fluunt ſequentes obſervationes.

1. Ponatur enim primo: omnes radices eſſe reales, & inæquales, ut poſitum eſt in conſtructione, quo in caſu tertium membrum Æquationis A. nempe $2a^3 - 2abb$ erit poſitiva quantitas (ponitur enim a major quam b) unde etiam $p^3 - qq$ erit poſitiva quantitas; nempe cubus ex triente ſeu parte tertia coefficientis, quæ eſt $aa + \frac{bb}{3}$ erit major quadrato ex ſemiſſe homogenei nempe $a^3 - abb$

*

2. Et.

2. Ergo viciſſim ſi p^3 eſt minor qq, non erunt radices reales, ſed duæ erunt imaginariæ.

3. Quod ſi ponantur duæ radices poſitivæ reales, & æquales, tum quantitas b fit nihilum, atque hinc ſecundum membrum Æquationis fit pariter nihilum.

Ponantur enim radices poſitivæ reales, & æquales, quarum duæ primæ (cum deeſſe debeat ſecundus terminus), ſint poſitivæ, tertia negativa; erit prima $x = a$ ſecunda pariter $x = a$, tertia $x = -2a$; atque adeo radices componentes ſimplices $x - a = 0$, item $x - a = 0$, & $x + 2a = 0$.

Quæ inter ſe multiplicatæ producunt Æquationem cubicam

C $x^3 - 3aax + 2a^3 = 0$

in qua quantitas b non comparet.

Eodem modo evaneſcet b, ſi primæ duæ radices ponantur negativæ, & tertia poſitiva, ſeu ſi componentes ſimplices fuerint: $x + a = 0$, $x + a = 0$, $x - 2a = 0$

Ex quarum multiplicatione oritur

D $x^3 - 3aax - 2a^3 = 0$

Et hinc ſi Æquatio C cum Æquatione generali $x^3 - 3px + 2q = 0$ conferatur

Erit $p = aa$

Et $q = a^3$

Conſequenter erit $p^3 - qq = 0$, cum ſit $a^6 - a^6 = 0$; & erit $p^3 = qq$

Igitur ſi in Æquatione aliqua cubica, cui deſit ſecundus terminus ſit $p^3 = qq$; erunt in ea duæ radices reales, & æquales.

Poſi-

Poſitis duabus radicibus æqualibus invenire radices.

Cum radices ponantur æquales, erit $b = 0$;
Erunt igitur coefficientes $3aa = 3p$
Et $2a^3 = 2q$
Erit ergo $aa = p$
Et $a^3 = q$ conſequenter dividendo æqualia per æqualia erit $\frac{a^3}{aa} = \frac{q}{p} = a$

Unde prodit ſequens regula ad extrahendam radicem æqualem, ſeu poſitivam, ſeu negativam: ut ſemiſſis homogenei nempe a^3 dividatur per trientem coefficientis ſeu aa.

Poſitis radicibus inæqualibus quarum aliqua eſt rationalis invenire radices.

1. Si ex $4aa$ quadrato, cujus radix eſt $2a$, ſubtrahatur coefficiens Æquationis A, vel B, nempe $3aa + bb$, fit reſiduum $aa - bb$. At ſi per hoc reſiduum dividatur homogeneus $2a^3 - 2abb$ earundem Æquationum A, vel B, prodibit quotus $2a$, quæ una eſt ex radicibus.

2. Rurſus ſi quadratum radicis $a + b$; nempe $aa + 2ab + bb$ ſubtrahatur a coefficiente $3aa + bb$, fit reſiduum $2aa + 2ab$.

Et ſi per hoc reſiduum dividatur homogeneus $2a^3 - 2abb$: prodit $a - b$; quæ eſt altera ex quæſitis radicibus.

Ex quibus duæ diverſæ regulæ oriuntur ad inveniendas radices, ſi quæ ſint rationales.

Prima: ut coefficiens tertii termini ſubtrahatur ex aliquo quadrato majore; & ſi reſiduum metitur homogeneum, quotus erit quæſita radix.

Altera : ut ex coefficiente tertii termini ſubtrahatur aliquod quadratum minus, & ſi reſiduum metitur homogeneum, quotus erit quæſita radix.

Quæ nunc exemplis ſunt declaranda.

Sit ergo $x^3 - 7x + 6 = 0$

Quæ pertinet ad formulam $x^3 - 3px + 2q = 0$

Et quoniam in hac p^3 eſt major quam qq, omnes radices erunt reales, & inæquales; cumque homogeneus ſit poſitivus, erunt duæ radices poſitivæ, tertia vero negativa.

Si per primam regulam ex quadrato aliquo 9, quod majus eſt, quam coefficiens datus 7 ſubtrahatur 7, fiet reſiduum 2, per quod diviſo homogeneo 6, prodit quotus 3; erit ergo 3 radix, & quidem negativa, cum ſit maxima, quæ cum ſumma duarum poſitivarum faciat nihilum; nempe $- 3$.

Quod ſi per ſecundam regulam quadratum 4 ſubtrahatur ex 7, & per reſiduum 3 dividatur 6; quotus 2 erit una ex poſitivis. Altera vera poſitiva erit 1.

Sit ſecundo $x^3 - 19x + 30 = 0$

Et quoniam p^3 eſt major quam qq, omnes radices erunt reales, & inæquales, & duæ erunt poſitivæ, tertia negativa.

Subtrahatur per primam regulam 19 a 25, quod eſt qnadratum majus, quam 19; & per reſiduum 6 dividatur 30, quotus 5 erit negativa radix ſeu -5, utpote maxima datarum.

Vel quadratum 9 per ſecundam regulam ſubtrahatur a 19, per reſiduum 10 dividatur 30, & quotus 3 erit una ex radicibus poſitivis. Ita quoque ſi ex 19 ſubtrahatur quadratum 4, fiet reſiduum 15, per quod diviſo 30 ſit quotus 2; quæ eſt poſitiva altera ex radicibus.

At

At ſi ſubtrahatur per ſecundam regulam quadratum 16, licet minus ſit quam 19, fit reſiduum 3; per quod diviſo 30, fit quotus 10; qui cum non ſit radix; confugiendum erit ad aliud quadratum, puta 9. vel 4, & hinc operatio per plura quadrata tentanda eſt.

Sit tertio $x^3 - 15x + 4 = 0$

Subtracto per primam regulam 15 a quadrato majore nempe 16 fit reſiduum 1; per quod diviſio 4 fit quotus 4; nempe quæſita radix negativa. Jam vero cum aliæ duæ radices fruſtra per dictas regulas indagentur, ad alias ſolutiones confugiendum erit; nempe ut per diviſionem Æquatio hæc cubica reducatur ad quadraticam, quæ reſoluta *per Cap. III.* dabit quæſitas radices. Dividatur ergo Æquatio cubica per Æquationem ſimplicem inventam jam radicem 4 continentem, nempe per $x + 4$, ut probl. I. Cap. IV. docuimus, & habebitur Æquatio quadratica $xx - 4x + 1 = 0$, qua reſoluta fiunt radices $2 \pm \sqrt{3}$. Ergo radices Æquationis cubicæ erunt -4; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

SCHOLION.

CUm per primam regulam quæratur maxima radix, neque prodit exactus homogenei diviſor, id argumento eſt, maximam radicem eſſe irrationalem.

Et ſi quæratur una ex minoribus per ſecundam regulam, neque prodeat exactus diviſor, tum argumento eſt, radices minores eſſe irrationales.

Reſolvere Æquationes quaſcunque Cubicas.
Prima Methodus.

Sit Æquatio generalis
$x^3 + 3px + 2q = 0$
ad quam reducantur omnes ſecundo termino carentes.

Erit A. $x^3 = -3px - 2q$
Fiat $x = y + a$
Et erit $x^3 = y^3 + 3aay + 3ay^2 + a^3$
Et $-3px = -3py - 3pa.$
Igitur ſubſtituendo in Æquatione A
Erit B. $y^3 + 3aay + 3ay^2 + a^3 = -3py - 3pa - 2q$

Fiat $-3px$, ſeu $-3py - 3pa = 3aay + 3ay^2$
& divid. per $+3y + 3a$
Erit $-p = ay$
Seu $-\frac{p}{y} = a$

Jam in Æquatione B ob $-3py - 3pa = 3aay + 3ay^2$
Erit $y^3 + a^3 = -2q$
Et loco a^3 ſubſtituendo valorem inventum $-\frac{p^3}{y^3}$
Erit $y^3 - \frac{p^3}{y^3} = -2q$ ſeu $y^3 - \frac{p^3}{y^3} + 2q = 0$
Et multipl. per y^3, & transponendo p^3
Erit $y^6 + 2qy^3 = p^3$
quæ eſt derivata ſecundi gradus, & quæ per completionem quadrati, & extractionem radicis quadratæ fit $y^3 = -q + (\sqrt{qq + p^3})$

Et

Et extracta radice cubica ſit

$$y = (\sqrt[3]{-\ q + (\sqrt{qq} + p^3)})$$

cumque ſit $x = y + a$, & $a = \frac{p}{y}$

Erit ergo

$$x = (\sqrt[3]{-q + (\sqrt{qq} + pp)}) + \frac{p}{(\sqrt[3]{-q + (\sqrt{qq} + pp)})}$$

quæ eſt formula univerſalis pro quacunque Æquatione cubica, cui deſit ſecundus terminus.

Sit ergo $x^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + 24x + 8 = 0$
Ex qua ſit extrahenda radix cubica
Erit ergo $3p = 24$, $2q = 8$

Atque adeo $x = (\sqrt[3]{-\ 4 + \sqrt{528}}) + \frac{8}{(\sqrt[3]{-4 + \sqrt{528}})}$

Hac methodo uſi ſunt Arabes, & Itali.

Altera methodus.

Sit Æquatio generalis
A $\quad x^3 - 3px - 2q = 0$
Fiat $x^3 = a + b$
Erit $x^3 = a^3 + 3abb + 3abb + b^3$
Sive $x^3 = a^3 + 3aax + b^3$
Quare $x^3 - a^3 - 3abx - b^3 = 0$
Quæ Æquatio ejusdem eſt formæ cum propoſita. A

Comparando ergo coefficientes
Fiet primo $p = ab$

 Se-

Secundo $2q = a^3 + b^3$
Multipl. per a^3 erit $2a^3 q = a^6 + a^3 b^3 = a^6 + p^3$
Erit ergo Æquatio $a^6 - 2qa^3 + p^3 = 0$.

Quæ cum ſit derivativa ſecundi gradus, facile poterit reſolvi per completionem quadrati, & extractionem radicis quadratæ, eritque

$a^3 = q + (\sqrt{qq - p^3})$

Igitur $a = (\sqrt[3]{\ } q + (\sqrt{\ } qq - p^3)$
Eodem modo cum ſit $2q = a^3 + b^3$
Erit $b^3 = 2q - a^3$
Subſt.it. loco a^3 erit $b^3 = 2q - q \mp (\sqrt{qq - p^3})$
Id eſt $b^3 = q - (\sqrt{qq - p^3})$
Ergo $b = (\sqrt[3]{\ } q - (\sqrt{qq - p^3})$
Cum igitur $x = a + b$
Erit $x = (\sqrt[3]{\ } q + (\sqrt{qq - p^3}) + (\sqrt[3]{\ } q - (\sqrt{qq - p^3})$
Hæc formula item eſt univerſalis pro quacunque Æquatione cubica, cui deſit ſecundus terminus.

Sed cum quælibet radix cubica alicujus quantitatis triplicem habeat valorem & exempli gratia radix cubica m^3, ſeu $1 \times m^3$,

Sit triplex; nempe

$1 \times m$

$\dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times m$

$\dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times m$

ideo erit triplex valor quantitatis a.

Nempe: $a = (\sqrt[3]{\ } q + (\sqrt{qq - p^3})$

$a =$

$$a = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} + (\sqrt{qq - p^3})$$

$$a = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} + (\sqrt{qq - p^3})$$

Triplex ſimiliter erit valor b, & erit

$$b = (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

$$b = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

Quoniam ergo $x = a + b$
Erit quoque pro triplici valore

$$x = (\sqrt[3]{q} + (\sqrt{qq - p^3}) + (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt[3]{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} + (\sqrt{qq - p^3})$$

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} + (\sqrt{qq - p^3})$$

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times (\sqrt[3]{q} - (\sqrt{qq - p^3})$$

quæ ſunt formulæ ad exprimendas ſingulas radices cujuscunque Æquationis Cubicæ.

 Sit

Sit exempli gratia $x^3 + 12x + 18 = 0$

Cujus radices ſit extrahendæ. Comparatis coefficientibus hujus cum coefficientibus Æquationis generalis $x^3 + 3px + 2q = 0$

Fiet $p = 4, q = 9$.

Erit ergo $x = (\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}) + (\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}})$

Eodem modo per binas reliquas formulas extrahentur radices reliquæ.

Sit ſecundo $x^3 - 12x - 18 = 0$

Erit $p = -4, q = -9$

Quare $x = (\sqrt[3]{-9 + \sqrt{17}}) + (\sqrt[3]{-9 - \sqrt{17}})$

SCHOLION.

NOtandum tamen, quod hæ formulæ licet generales, in caſu tamen quo omnes radices ſunt reales, easdem ambigue exponant. Cum enim, ut ſuo loco notavimus, in eo caſu ſit p^3 major quam qq, erit ergo $\sqrt{qq - p^3}$ quantitas imaginaria, ac proinde radices, quæ ex formula exhibendæ eſſent reales, exhibentur imaginariæ.

Ita ſi ſit Æquatio,

$x^3 - 7x + 6 = 0$

Cujus radices ſunt $1, 2, -3$, exhibentur a formula generali tanquam forent imaginariæ. Eſt enim $q = 3$ $p = \frac{7}{3}$.

Et hinc ſecundum formulam radices forent

$$x = (\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}) + (\sqrt[3]{3 - \tfrac{100}{27}})$$

$x =$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{-3} \times \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{-3} \times \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{-3} \times \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{-3} \times \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}\right)$$

quarum ſingulæ ſunt ſub forma imaginaria, qui quidem non exiguus videtur eſſe defectus formulæ generalis.

Cui difficultati, ut obviam irent ſolertiſſimi viri, videbatur enim Analyſis in hoc caſu deficere, conatum omnem adhibuere reperiendi methodum, qua ad caſus quosvis formulam generalem ſi fieri poſſit extenderent, ut nempe ex formula, quæ radices imaginarias pro realibus exhibet, reales ipſæ extraherentur, quod per extractionem radicis cubicæ ex binomiis felici conatu aſſecuti ſunt. Methodum ipſam nunc exponemus.

Sit enim binomium imaginarium $2 + \sqrt{-121}$, ex quo extrahenda ſit radix cubica.

Sit illa $a + \sqrt{-b}$
Eritque ejus cubus

$$a^3 - 3ab + (\sqrt{-9a^4b}) + \sqrt{-b^3}$$
$$= 2 + \sqrt{-121}$$

Æquetur pars rationalis unius membri parti rationali alterius, & erit $a^3 - 3ab = 2$

Æquetur quoque pars irrationalis irrationali, & erit

$$(\sqrt{-9a^4}) + \sqrt{-b^3} = \sqrt{-121}$$

Quadrando primam Æquationem erit

$$a^6 - 6a^4 b + 9aabb = 4$$

Similiter quadrando ſecundam habebitur

$$9a^4b - 6aabb + b^3 = 121$$

Addendo utramque fit

$$a^6 + 3a^4b + 3aabb + b^3 = 125$$

Cumque ex utraque parte Æquationis ſit cubus perfectus, extracta radice cubica erit $aa + b = 5$

Unde ſit $b = 5 - aa$

Cum ergo ſit $a^3 - 3ab = 2$

Subſtituendo loco b valorem ejus $5 - aa$ fit $4a^3 - 15a = 2$

Cujus Æquationis radix eſt 2

Adeoque $b = 1$. Radix ergo quæſita erit $2 + \sqrt{-1}$.

Similiter ſi ſit alterum binomium imaginarium $2 - \sqrt{121}$ invenietur ejus radix cubica $2 - \sqrt{-1}$. Unde ſi ex formula generali habeatur

$$x = (\sqrt[3]{2 + (\sqrt{-121})} + (\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}})$$

poterit per hanc methodum explicari valor ejus in rationalibus, & erit $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Sit itaque ex formula generali

$$x = (\sqrt[3]{-3 - \sqrt{\tfrac{100}{27}}}) + (\sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}})$$

Extra-

Extrahatur radix cubica ex utroque binomio ſurdo, eritque earum ſumma quæſita radix.

Fiat ergo $-a - \sqrt{-b} = (\sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}})$

& erit cubus

$$-a^3 + (\sqrt{-9a^4 b}) + 3ab + \sqrt{-b^3} = -3\sqrt{-\frac{100}{27}}$$

Sit $-a^3 + 3ab = -3$

$$(\sqrt{-9a^4 b}) + \sqrt{-b^3} = \sqrt{-\frac{100}{27}}$$

Et quadrando utramque Æquationem erit

$$a^6 - 6a^4 b + 9aabb = 9$$

$$-9a^4 b + 6aabb - b^3 = -\frac{100}{27}$$

& ſubtrahendo ſecundam a prima, ſeu mutatis ſignis in contraria addendo utramque erit

$$a^5 + 3a^4 b + 3aab + b^3 = \frac{343}{27}$$

& extracta utrobique radice cubica

$$aa + b = \frac{7}{3}$$

Eſt ergo $b = \frac{7}{3} - aa$.

Et quoniam $-a^3 + 3ab = -3$

ſubſtituto valore b, fit $-4a^3 + 7a = -3$

Seu transponendo erit $0 = 4a^3 - 7a - 3$

Seu $4a^3 - 7a - 3 = 0$

Cujus radix eſt $\frac{3}{2}$

Erit

Erit ergo $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{12}$

Igitur prima pars quæſitæ radicis eſt $-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{12}}$

Altera pars $-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$.

quarum ſumma $= -3$

Univerſaliter.

Ponatur $a + \sqrt{b}$ eſſe radix cubica binomii ſurdi $q + \sqrt{qq - p^3}$, eruetur per hanc methodum formula ſimplicior, & radices fient.

Prima $2a$

Secunda $-a + \sqrt{-3b}$

Tertia $-a - \sqrt{-3b}$

EXEMPLUM I.

Sit $x^3 - 7x - 6 = 0$

Erit $p = \frac{7}{3}$; $q = 3$

Binomium ſurdum hujus Æquationis erit $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$

Cujus radix cubica eſt $-1 + \sqrt{-4}$. Quare $a = -1$, $b = -\frac{4}{3}$.

Erunt ergo radices

Prima -2

Secunda 3

Tertia -1

Quod

Quod ſi ejuſdem binomii radix cubica ponatur $\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$, tres enim agnoſcit, erit $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{25}{12}$, & eædem invenientur radices.

EXEMPLUM II.

Sit $x^3 - 100996x - 12063360 = 0$
Erit $p = \frac{100996}{3}$, $q = 6031680$

Binomium ſurdum ſecundum formulam generalem, nempe $q + \sqrt{qq - p^3}$, erit
$6031680 + \sqrt{\frac{47887175043136}{27}}$
Cujus radix cubica eſt $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$.

Erit ergo $a = 183$, $b = -\frac{529}{3}$

Erunt ergo radices
Prima 366
Secunda $= -183 + \sqrt{529} = -160$
Tertia $= -183 - \sqrt{529} = -206$.

SCHOLION.

HÆc ſunt, quæ ad uſum perfectum formulæ addidere viri doctiſſimi. Præclarum equidem inventum, ſi eadem felicitate, qua rationales quantitates ex ænigmate imaginario evolvit, evolveret etiam irrationales, quod quidem fieri non poteſt.

(*)Li-

(*) Licet igitur ad alios omnes caſus ſe extendat Methodus reſolvendi ſecundum formulam generalem, ubi tamen tres dantur in Æquatione radices reales irrationales, Methodus hæc deficit; vocaturque *Caſus irreſolutus.*

CAPUT V.

De Æquationibus Biquadraticis.

Biquadraticas Æquationes reſolvere.

Reſolutiones Æquationum Biquadraticarum ſecundo termino tantum carentium ad reſolutiones Cubicarum more Carteſii reducantur.

Sit $x^4 + pxx + qx + r = 0$
quæ Æquatio omnes biquadraticas repræſentet ſecundo termino carentes.

Concipiatur hæc generari ex duabus Æquationibus $xx + ax + b = 0$
Et $xx - ax + c = 0$

Si autem hæc multiplicentur inter ſe, faciunt

$$\begin{aligned} x^4 - aaxx &- abx + bc = 0 \\ + bxx &+ acx \\ + cxx & \end{aligned}$$

Quæ Æquatio eadem erit cum propoſita.
Comparando ergo coefficientes, fit

Pri-

(*) *Cujus rei impoſſibilitatem demonſtratam ſi cupias vide Tomi ſeu Libri II. cap. 7. § V. & VI. Elementorum Algebræ Clariſſimi Nicolai de Martino Mathematum Profeſſoris Neapolitani.*

Primo $-aa + b + c = p$
Secundo $-ab + ac = q$
Tertio $bc = r$
Quare per primam $b + c = aa + p$
Et multiplicando per a, erit $ab + ac = a^3 + ap$
Sed per ſecundam $ac - ab = q$
Ergo addendo erit $2ac = a^3 + ap + q$
Subtrahendo vero easdem $2ab = ap + a^3 - q$
Multiplicatis ergo hujuſmodi Æquationibus inter ſe
Erit $4aabc = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$
Et quoniam $bc = r$, fiet tandem
$4aar = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$
nempe $a^6 + 2pa^4 + ppaa - qq = 0$
$-4raa$
Quæ eſt Æquatio derivativa cubica

Reſoluta igitur hac Æquatione per præcedentia problemata dabitur valor a, quo dato datur quoque valor ipſius b, &c.

Cum enim ſit $2ac = a^3 + ap + q$
Et $2ab = a^3 + ap - q$
Erit $c = \frac{a^3 + ap + q}{2a}$
Et $b = \frac{a^3 + ap - q}{2a}$

Dabuntur ergo Æquationes componentes, cujus radices ſunt eædem ac radices propoſitæ.

Sunt autem radices Æquationis propoſitæ.
Prima $+ \left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right) - \frac{a}{2}$
Secunda $- \left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right) - \frac{a}{2}$

Ter-

(*) Licet igitur ad alios omnes caſus ſe extendat Methodus reſolvendi ſecundum formulam generalem, ubi tamen tres dantur in Æquatione radices reales irrationales, Methodus hæc deficit; vocaturque *Caſus irreſolutus.*

CAPUT V.

De Æquationibus Biquadraticis.

Biquadraticas Æquationes reſolvere.

RESolutiones Æquationum Biquadraticarum ſecundo termino tantum carentium ad reſolutiones Cubicarum more Carteſii reducantur.

Sit $x^4 + pxx + qx + r = 0$
quæ Æquatio omnes biquadraticas repræſentet ſecundo termino carentes.

Concipiatur hæc generari ex duabus Æquationibus $xx + ax + b = 0$
Et $xx - ax + c = 0$

Si autem hæc multiplicentur inter ſe, faciunt

$$\begin{array}{llll} x^4 - aaxx & - abx & + bc = 0 \\ + bxx & + acx & \\ + cxx & & \end{array}$$

Quæ Æquatio eadem erit cum propoſita.
Comparando ergo coefficientes, fit

Pri-

(*) *Cujus rei impoſſibilitatem demonſtratam ſi cupias vide Tomi ſeu Libri II. cap. 7. § V. & VI. Elementorum Algebræ Clariſſimi Nicolai de Martino Mathematum Profeſſoris Neapolitani.*

Primo $- aa + b + c = p$
Secundo $- ab + ac = q$
Tertio $bc = r$
Quare per primam $b + c = aa + p$
Et multiplicando per a, erit $ab + ac = a^3 + ap$
Sed per ſecundam $ac - ab = q$
Ergo addendo erit $2ac = a^3 + ap + q$
Subtrahendo vero easdem $2ab = ap + a^3 - q$
Multiplicatis ergo hujusmodi Æquationibus inter ſe
Erit $4aabc = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$
Et quoniam $bc = r$, fiet tandem
$4aar = aapp + 2pa^4 + a^6 - qq$
nempe $a^6 + 2pa^4 + ppaa - qq = 0$
$- 4raa$
Quæ eſt Æquatio derivativa cubica

Reſoluta igitur hac Æquatione per præcedentia problemata dabitur valor a, quo dato datur quoque valor ipſius b, &c.

Cum enim ſit $2ac = a^3 + ap + q$
Et $2ab = a^3 + ap - q$

Erit $c = \frac{a^3 + ap + q}{2a}$

Et $b = \frac{a^3 + ap - q}{2a}$

Dabuntur ergo Æquationes componentes, cujus radices ſunt eædem ac radices propoſitæ.

Sunt autem radices Æquationis propoſitæ.

Prima $+ \left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right) - \frac{a}{2}$

Secunda $- \left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right) - \frac{a}{2}$

Ter-

Tertia $+ (\sqrt{\frac{aa}{4} - c}) + \frac{a}{2}$

Quarta $- (\sqrt{\frac{aa}{4} - c}) + \frac{a}{2}$

Oportet autem determinare quantitatem a methodo, quæ ſequitur.

EXEMPLUM I.

Sit Æquatio $x^4 - 12xx + 12x - 3 = 0$ Erit ergo $p = -12$, $q = 12$, $r = -3$ quibus valoribus ſubſtitutis in Æquatione cubica generali fit

$$a^6 - 24a^4 + 156aa - 144 = 0$$

quæ reſpondet datæ Æquationi; in qua invenitur $aa = 12$ erit ergo $a = \sqrt{12}$; qua determinata reperietur ex Æquationibus prioribus ſubſtituto valore ipſius a valor de $b = \sqrt{3}$, $c = -\sqrt{3}$

Ergo Æquationes componentes erunt

$$xx - x\sqrt{12} - \sqrt{3} = 0$$
$$xx + x\sqrt{12} + \sqrt{3} = 0$$

Radices primæ Æquationis ſunt

$$+ (\sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \sqrt{3}$$
$$- (\sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \sqrt{3}$$

Radices alterius

$$+ (\sqrt{3 - \sqrt{3}}) - \sqrt{3}$$
$$- (\sqrt{3 - \sqrt{3}}) - \sqrt{3}$$

EXEMPLUM II.

Sit $x^4 - 86xx + 600x - 851 = 0$ Erit cubica reſpondens

$$a^6 - 172a^4 + 10800aa - 360000 = 0$$

In

In qua $aa = 100$, & $a = 10$
Erit ergo $b = -23$, $c = 37$
Et hinc componentes ſient

$$xx + 10x - 23 = 0$$
$$xx - 10x + 37 = 0$$

Radices componentis primæ ſunt

$$+ (\sqrt{48}) - 5$$
$$- (\sqrt{48}) - 5$$

Radices alterius ſunt

$$5 + \sqrt{-12}$$
$$5 - \sqrt{-12}$$

Quæ ſunt eædem ac radices propoſitæ, duæ nempe reales, & duæ imaginariæ.

COROLLARIUM.

1. EX his intelligitur; quod, ſi detur Æquatio ſecundo termino gaudens, oporteat ſecundum hanc methodum reducere illam ad Æquationem ejusdem termini expertem.

Licet enim facile poſſit transmutari formula pro quacunque Æquatione, cum tamen ſit magis compoſita, conſultius eſt adhibere ſimpliciorem.

2. Si quantitas a prodeat rationalis, erunt etiam b, & c rationales. In quo caſu Æquatio biquadratica reduci poterit ad quadraticam, & ejus radices exprimentur ſemper radicali quadrato.

Secus ſi a prodeat irrationalis; tum enim radices quæſitæ erunt affectæ radice cubica.

3. Si Æquatio propoſita ſecundo ſimul, & quarto careat termino, tum conſiderari poterit ut quadratica; & juxta methodum quadraticarum reſolvi.

Sic ſi detur $x^4 \ldots\ldots + qxx \ldots\ldots - r = 0$

Fiat $z = xx$

Et fiet Æquatio $zz + qz - r = 0$

Cujus radices erunt

$$+\left(\sqrt{r + \frac{qq}{4}}\right) - \frac{q}{2}$$

$$-\left(\sqrt{r + \frac{qq}{4}}\right) - \frac{q}{2}$$

Cumque $x = \pm\sqrt{z}$

Erunt radices quæſitæ

$$\pm\sqrt{\left(\sqrt{r + \frac{qq}{4}}\right) - \frac{q}{2}}$$

$$\pm\sqrt{-\left(\sqrt{r + \frac{qq}{4}}\right) - \frac{q}{2}}$$

IV. Si demum Æquatio omnibus careat intermediis, dicitur *pura*, & facile reſolvitur per extractionem radicis quadrato-quadraticæ.

Ut ſi fiat $x^4 + q = 0$

Erit $x^4 = -q$

Igitur $xx = \pm\sqrt{-q}$

Et $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-q}}$

SCHOLION.

INterim notandum: quod ſi Æquatio biquadratica omnes radices reales habeat, etiam in cubica, quæ

quæ ipſi reſpondet, omnes erunt radices reales, atque adeo in caſum incurritur irreſolutum.

Quod ſi illa duas habebat radices reales, & duas imaginarias, erunt quoque duæ imaginariæ in cubica, quæ facile proinde per formulam generalem, reſolvitur.

Denique ſi omnes in biquadratica ſint imaginariæ, omnes in cubica fiunt reales, & rurſus in caſum irreſolutum incurritur.

Sed cum radices reales rationales ſemper poſſint ex Æquatione cubica educi, vel per methodum diviſorum, vel per extractionem radicis Binomii ſurdi, ut explicavimus; poterit ſemper biquadratica Æquatio, etiam cum omnes habet imaginarias, vel omnes reales, exacte reſolvi. At ſi in cubica ſint irrationales, quoniam neque per methodum diviſorum, neque per reſolutionem binomii exactæ radices poſſunt educi, ſed tantum proximæ, fiet ut in eo caſu proximæ ſolum haberi poſſint Æquationis propoſitæ radices.

CAPUT VI.

Methodus generalis reſolvendi altiores Æquationes.

ANtequam Methodum generalem reſolvendi Æquationes altiores aggrediamur, probe diſtinguendæ ſunt Æquationes dimenſionum parium, ab imparium; quemadmodum enim Æquationes tertii gradus ſeu cubicæ eæ tantum ſolvi poſſint, quæ unam notam radicem realem, binas vero imaginarias continent, ita universaliter Æquatio dimenſionum imparium tunc ſolum ſolvi poterit, cum unam habuerit

radicem, realem cæteras imaginarias, conſequenter ſi plures fuerint reales fruſtra, ut in cubicis vidimus, tentatur reſolutio.

Æquationes vero dimenſionum parium eadem lege, qua biquadraticæ procedunt; nimirum hæ: Æquationes tum demum reſolvi poterunt, cum duas habuerint radices reales, cæteras vero imaginarias. Atque adeo ſi plures duabus radices reales contineant, fruſtra quæretur reſolutio; quod tamen ſolum de Æquationibus dimenſionum parium, quæ affectionem cubicam habent, dictum velim; ſi enim fuerint immunes ab affectione cubica, dividi poterunt in alias duas, & beneficio radicalium quadratorum quandoque reſolvi, licet plures duabus, radices reales contineant.

Notandum præterea: 1. radicem Æquationis, nullo termino deficientis, tot terminos continere, quot ſunt dimenſiones ipſius Æquationis, & non plures. Sic ſi Æquatio fuerit unius gradus, radix, habebit terminum unum, ſi ſecundi duos, ſi tertii tres &c. Et quot termini deficiunt in Æquatione, tot deficient etiam in radice.

2. Unus ex terminis radicis cujuscunque Æquationis debet ſuper adæquare eam partem quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam gradus Æquationis indicat. Scilicet ſemiſſem, ſi æquatio fuerit gradus ſecundi, trientem ſi tertii, quadrantem ſi quarti &c. Et hinc, ſi in Æquatione deficit ſecundus terminus, in radice quoque hic terminus deficiet. Ita ſi in Æquatione quadratica deſit ſecundus, radix erit monomia, ſi in cubica, erit binomia, ſi in biquadratica, trinomia &c.

Gene-

Generalis igitur methodus in eo conſiſtit, ut adſumantur Æquationes ſimplices, quarum radices ſint ejusdem ſpeciei cum radicibus Æquationis datæ; & compoſita ex illis Æquatio comparetur cum data, ut determinentur coefficientes aſſumpti, ex qua determinatione oritur ſemper Æquatio uno gradu inferior data.

Sit primo Æquatio generalis biquadratica immunis ab affectione cubica.

$$x^4 + 3pxx + 8qx + 4r = 0$$

Cujus duæ ſint radices reales, & duæ imaginariæ.

Sit $x - a - b = 0$

Et $x - a + b = 0$

Quæ repræſentant duas reales.

Sitque $x + a + \sqrt{-cc} = 0$

$$x + a - \sqrt{-cc} = 0$$

Quæ repræſentant duas imaginarias, ex earum multiplicatione fiet

$$\begin{array}{llll} x^4 & - 2aaxx & - 2ab^2x & + a^4 \\ & - bbxx & - 2ac^2x & - 2aabb = 0 \\ & + ccxx & & + aacc \\ & & & - bbcc \end{array}$$

Quæ erit ejusdem naturæ Æquatio cum propoſita.

Tum comparatis coefficientibus quemadmodum initio capitis præcedentis factum, & ſimul rite ſubſtitutis, quæ omnia brevitatis gratia hic omittimus, fiet:

$$\begin{array}{llll} a^6 & + 2pa^4 & + ppaa & - qq = 0 \\ & & - raa & \end{array}$$

Ex hujus Æquationis reſolutione facta per caput præcedens pendet reſolutio componentium, & ex iſtis reſolutio compoſitæ.

Eodem modo ſi ſit Æquatio quinque dimenſionum, in qua ſit una radix realis, & quatuor imaginariæ; ponantur hujusmodi radices componentes, fietque ex harum multiplicatione Æquatio ſimilis, & æqualis datæ; tum comparando coefficientes devenietur tandem ad Æquationem inferiorem, ex cujus reſolutione Æquatio data dependet

Ita ſi detur Æquatio ſex dimenſionum, cujus quatuor ſint radices imaginariæ & duæ reales, componi debebit Æquatio ex hujusmodi radicibus, & ad determinandos coefficientes habebitur ſemper Æquatio inferior.

Notandum tamen, licet Æquatio biquadratica, quæ omnes radices reales habet, reſolvi nequeat, cum vel affectionem cubicam contineat, vel ad duas quadraticas reduci non poſſit, poſſit tamen reſolvi, ſi in duas quadraticas ſit diviſibilis, vel natura ſua, vel etiam beneficio radicalium quadratorum.

Altera Methodus.

Altera methodus univerſalis reſolvendarum Æquationum procedit inquirendo valorem unius ſolum radicis indeterminatæ. Nititur autem hoc fundamento, quod radix realis cujusvis Æquationis ſecundo termino carentis, tot terminos generaliter continere debeat, quot Æquationis datæ ſunt dimenſiones, uno termino tamen ſemper minus.

Itaque reſoluturus Æquationem, radicem quam quærit, ita aſſumat, ut tot terminis, uno tamen minus, conſtet, quot graduum eſt data Æquatio: tum vero componat novam Æquationem ex hac radice, quæ eſſe debet ejusdem naturæ cum propoſita, compara-

paratis dein terminis hujus cum terminis datæ, determinare poterit quantitates indeterminate aſſumptas.

Sic ad reſolvendam Æquationem cubicam ut videre licet cap. IV. radicem aſſumpſimus $x = a + b$.

Ad biquadraticam aſſumi debet $x = a + b + c$

Ad quintæ poteſtatis Æquationem fiat $x = a + b + c + d$.

Et ſic de aliis.

In determinandis vero quantitatibus indeterminate aſſumptis prima ſemper determinari debet quantitas a, quæ ſemper per Æquationem uno gradu Æquatione propoſita inferiorem reſolvitur. Determinata autem quantitate a, reliquæ per Æquationes ſemper uno gradu iterum inferiores facile determinantur. Ita, ut ſi Æquatio reſolvenda ſit biquadratica, prima a per Æquationem cubicam determinabitur, ſecunda b per quadraticam, tertia c per ſimplicem, adeo, ut niſi Æquationes per gradus ordinatim decreſcentes reſolvantur, nulla per hanc methodum reſolutio obtineri poterit.

Hinc liquet methodum hanc eſſe eandem, quam cap. IV. pro reſolutione cubicarum, & cap. V. pro biquadraticarum Æquationum expoſuimus.

Verum ut paullo clarius methodus hæc univerſalis intelligatur; repetere placet ſolutionem Æquationis cubicæ cap. IV. allatam.

Sit itaque Æquatio cubica ſecundo termino deficiens:

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

Erit $x^3 = 3px + 2q$

Fiat $x = a + b$

Erit $x^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$
Subſtituendo loco x^3 valorem illius $3px + 2q$
Erit $3px + 2q = a^3 + 3aab + 3aab + b^3$

Jam vero totum reſolutionis artificium in hoc conſiſtit, ut termini ex cubo radicis binomiæ $a + b$, qui reſpondere debent termino $3px$, rite ſeparentur a terminis, qui æquari debent cum $2q$.

Obſervo igitur quantitatem $2q$ eſſe omnino rationalem, & ſine incognita; quantitatem vero $3px$ continere quantitatem radicalem x, quæ aſſumpta eſt æqualis $a + b$. Hinc concludo cubum de $a + b$ pariter duabus debere conſtare partibus, quarum una ſit rationalis, altera vero contineat quantitatem $a + b$.

Atque hac ratione reperio quantitatem $3aab + 3abb$ eſſe illam, quæ continet quantitatem radicalem $a + b$, eſt enim factum ex $3ab$ in $a + b$, conſequenter hanc pono æqualem $3px$. Et hinc cum ſit $3px = 3aab + 3abb$, erit $2q = a^3 + b^3$ parti nempe rationali cubi de $a + b$.

Habemus itaque $a^3 + b^3 = 2q$
Et $3aab + 3abb = 3px$
Seu divid. per 3 erit $aab + abb = px$
Subſtituendo loco x illius valorem $a + b$
Fiet $aab + abb = pa + pb$
Divid. per $a + b$ erit $ab = p$
Elevando ad cubum utramque Æquationis partem
Erit $a^3 b^3 = p^3$
Et quoniam in prima $a^3 + b^3 = 2q$
Multipl. per a^3 fiet $a^6 + a^3 b^3 = 2a^3 q$
Loco $a^3 b^3$ ſubſtit. p^3 erit $a^6 + p^3 = 2a^3 q$
Seu $a^6 - 2a^3 q + p^3 = 0$

Hæc

Hæc Æquatio cum ſit derivativa ſecundi gradus, haud difficile valor quantitatis a determinabitur, & ex hac valor quoque ipſius b; eſt enim $ab = p$, conſequenter $b = \frac{p}{a}$.

Hinc patet eandem eſſe methodum hanc generalem, quam cap. IV. exhibuimus pro cubicis in particulari.

Superſunt nonnulla, aliorum in hac materia præclare inventa, quæ his adjungi poſſent; verum neque in animo eſt omnia ingeniorum tentamina exponere, cum calculis involutiſſimis pleraque ſint inferta, neque neceſſe eſt, his methodis ad faſtigium nobiliſſimæ hujus ſcientiæ pervenire, cum quævis Æquatio facilius ſeu per methodum ante dictam, ſeu per methodum limitum nunc explicandam reſolvi poſſit.

CAPUT VII.

De Limitibus.

Limites vocantur quantitates, intra quas ſtant Æquationis radices.

Hoc eſt: Limites ſunt quantitates, quibus alicujus Æquationis radices veræ, nec majores, nec minores eſſe poſſunt

Sic: ſi limites alicujus Æquationis forent numeri 6 & 7, radix vera Æquationis nec eſſe poſſit numerus 8, nec numerus 5, ſed intra 6 & 7 contineri debet.

OBSERVATIO I.

Sit $x^4 - 34x^3 + 329xx - 1016x + 720 = 0$ Cujus radices ſunt omnes poſitivæ 1, 4, 9, 20.

Si loco x ſubſtituatur zerus, ſeu nihilum, omnes termini, in quibus reperitur x evaneſcunt, quia multiplicata per nihilum ſunt nihilum.

Erit ergo ſumma poſitiva $= 720$ æqualis termino ultimo.

Si loco x ſubſtituatur quælibet quantitas intermedia inter 0. & radicem primam 1; ſummæ fiunt ſemper poſitivæ, quæ gradatim augentur; & poſtquam ad maximum pervenere minuuntur, donec ſubſtituta radice 1 fiat ſumma æqualis nihilo, ſeu 0.

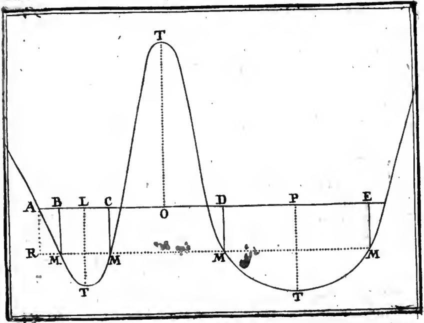
Subſtitutis deinde quantitatibus intermediis inter primam, & ſecundam radicem, nempe inter 1 & 4, ſummæ fiunt negativæ, quæ pariter creſcunt usque ad certum limitem, quo tranſgreſſo decreſcunt, donec ſubſtituta ſecunda radice 4 fiat ſumma $= 0$

Subſtituta quantitate intermedia inter 4 & 9, hoc eſt, inter ſecundam, & tertiam radicem ſummæ rurſus fiunt poſitivæ, quæ poſtquam ad certum excrevere limitem, gradatim decreſcunt, donec rurſus ſubſtituta tertia radice 9 fiat ſumma $= 0$

Subſtituta demum quantitate majori quam 9, rurſus fiunt ſummæ negativæ, quæ eadem lege primo creſcunt, dein decreſcunt, donec fiant æquales nihilo; ſubſtituta dein quantitate majore, quam 20 ſummæ fient ſemper poſitivæ, quæ in infinitum augeri poterunt, neque ulla reperietur quantitas, quæ dictam Æquationem ad nihilum redigat.

Quæ-

Quæcunque quantitates, inter quas ſtat radix, ſunt *Limites* ejusdem radicis; *Veri* autem *Limites* dicuntur ii, qui ſubſtituti loco incognitæ x dant maximas ſummas.



Quod ut ponatur ob oculos, liceat ex Geometria lumen mutuare, ſitque indeterminata Æquatio,

$$x^4, - 34x^3 + 329xx - 1016x + y = 0,$$

quæ repræſentatur per curvam AMTMT, in qua poſito principio in *A*, *Abſciſſæ* ſunt AB, AC, &c. quarum quælibet $= x$. *Ordinatæ* vero ſunt BM, CM, &c. quarum quælibet ſit $= y$.

Si

Si loco y ponatur 720, determinabitur Æquatio, & erit ea, quæ a nobis propoſita. Demiſſa ergo ordinata AR = 720, ductaque RM parallela rectæ AE, ſecabit curvam in quatuor punctis M, M, unde demiſſæ ordinatæ MB, MC, MD, ME, determinabunt abſciſſas AB, AC, AD, AE, quæ ſunt quatuor Æquationis datæ radices.

Si ex curvæ verticibus T, ducantur tres ordinatæ TL, TO, TP, erunt AL, AO, AP, *Veri Limites.* Itaque radix prima AB erit inter punctum A, ſeu zerum, & ſegmentum AL, cui reſpondet maxima ordinata LT. Secundæ radicis limites veri ſunt AL, & AO; tertiæ AO, & AP; quartæ AP, & quælibet alia quantitas major, quam AE.

Ex quibus ſequitur, quod invenire veros limites radicum idem ſit, atque invenire partes, quæ ſubſtitutæ in Æquatione dent maximas ſummas, quod problema ad maxima, & minima pertinet, & per calculos infiniteſimales facile expeditur.

Methodus autem uſita eſt, ut multiplicentur ordine termini Æquationis datæ per progreſſionem numerorum naturalium decreſcentem, in qua primus numerus ſit poteſtas datæ Æquationis, tum vero termini dividantur per radicem ſimplicem infimam ejusdem Æquationis; Et hac ratione tamdiu procedendum erit, donec habeatur Æquatio ſimplex, quæ reſoluta radicem exhibet. Notandum autem terminum homogeneum, quia per o multiplicatur, evaneſcere, ſeu fieri nihilum, ut in exemplis patebit.

Sit ergo $x^4 - 24x^3 + 329xx - 1016x - 100 = 0$
Multiplicentur termini per 4, 3, 2, 1, o.
Et fiet Æquatio limitum

$4x^4$

$$4x^4 - 72x^3 + 658x^2 - 1016x = 0$$

cujus termini diviſi per x dant Æquationem ſequentem

$$4x^3 - 72x^2 + 658x - 1016 = 0$$

Rurſus ſi hujus termini multiplicentur per 3, 2, 1, 0 & dividantur per x

Erit $12x^2 - 144x + 658 = 0$

Quæ eſt ſecunda Æquatio limitum, cujus nempe radices ſunt limites radicum ſuæ antecedentis.

Tandem ſi hæc rurſus multiplicetur per 2, 1, 0 & rurſus dividatur per x

Fiet tertia Æquatio limitum

$$24x - 144 = 0$$

In qua fit $x = 6$

COROLLARIUM I.

Ex dictis facile intelligitur, quod ſi duæ quantitates diverſæ ſubſtituantur, quarum una efficiat ſummam poſitivam, altera negativam, aut e contra; hæ quantitates ſunt ſemper limites alicujus radicis. Secus ſi idem ſignum præbeant. Quæ obſervatio limites probat. Ut enim ſint veri limites, debent dare ſigna contraria, cujus rei exempla infra dabimus, ubi methodum Newtonianam adducturi ſumus.

THEOREMA.

Si datur Æquatio, cujus plures radices ſunt æquales, Æquatio limitum continebit eaſdem radices una tamen minus.

Sit enim Æquatio

$$x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$$

cujus omnes radices æquantur f.

Multi-

Multiplicentur termini per 4, 3, 2, 1, 0. & dividantur per x erit prima Æquatio limitum

$$4x^3 - 12fx^2 + 12ffx - 4f^3 = 0$$

Seu dividendo omnes terminos per 4

$$x^3 - 3fx^2 + 3ffx - f^3 = 0$$

cujus tres radices æquantur f.

Si hæc rurſus multiplicetur per 3, 2, 1, 0, & dividatur per x, habebitur ſecunda Æquatio limitum

$$3x^2 - 6fx + 3ff = 0$$

Seu dividendo per 3 erit

$$x^2 - 2fx + ff = 0$$

cujus duæ radices æquantur f.

Si tandem hæc rurſus multiplicetur per 2, 1, 0, & dividatur per x habebitur tertia Æquatio limitum

$$2x - 2f = 0$$

Seu dividendo per 2 $x - f = 0$

& fiet $x = f$

Simili modo ſi detur Æquatio

$$\begin{aligned} x^3 &- 2fxx + ffx - cff = 0 \\ &- cxx + 2cfx \end{aligned}$$

Cujus duæ ſunt radices æquales f, reperietur Æquatio limitum

$$\begin{aligned} 3xx &- 4fx + ff \\ &- 2cx + 2cf \end{aligned}$$

Cujus una radix eſt f.

Ex hoc progreſſu liquet, ſi data Æquatio plures radices æquales habeat, Æquatio limitum continet easdem, ſed ſemper una minus.

COROLLARIUM. I.

Ergo ſi aliquis limes ſubſtitutus in Æquatione propoſita facit omnes terminos evaneſcere, hic erit radix communis, & data Æquatio duas ſaltem hujusmodi continebit radices.

Sit v. g. Æquatio $x^3 - 8xx + 21x - 8 = 0$

Reperietur Æquatio limitum per ante dictam methodum

$$xx - \frac{16x}{3} + 7 = 0$$

Cujus una radix eſt 3.

At ſubſtituto 3 in data Æquatione termini ſiunt æquales nihilo, ſeu evaneſcunt; Ergo 3 eſt quoque radix Æquationis datæ, & duæ ſunt in illa radices æquales 3.

COROLLARIUM II.

Si limes ſubſtitutus in Æquatione data nec dat ſigna alterna, neque facit terminos omnes evaneſcere, erunt in data Æquatione radices imaginariæ.

Et quoniam radices imaginariæ ſemper ſunt numero pares, tot erunt paria hujusmodi radicum, quoties id acciderit.

EXEMPLUM I.

Ut autem Theoria illuſtretur exemplis, ſit Æquatio $xx - 50x + 600 = 0$.

Cujus per hanc methodum quærantur radices.

Multiplicatis ergo terminis per 2, 1, 0. & diviſis per x

Fiet Æquatio limitum $2x - 50 = 0$
Conſequenter $x = 25$

Erit ergo 25 limes, & quoniam o eſt minima omnium poſitivarum, erit prima radix inter o. & 25. Et quoniam maximus coefficiens negativus $- 50$ eſt major quacunque radice poſitiva, altera radix erit inter 25, & 51.

Limites ergo ſunt o. 25. 51

Et quoniam in Æquatione loco x ſubſtituto o fit poſitiva quantitas, ſeu affecta ſigno +, ſubſtituto 25 fit negativa, ſeu affecta ſigno −, & rurſus ſubſtituto 51 fit poſitiva ſeu affecta ſigno +, numeri hi erunt veri limites.

Quæratur ergo prima radix ſubſtituendo quantitatem intermediam inter o, & 25, & ſubſtituto v. g. 10 fit negativa quantitas, ſeu affecta ſigno −.

Ergo 10 eſt minor radice vera, & ſubſtituto 15 fit adhuc minus. Ergo 15 eſt minor radice.

Demum ſubſtituto 20 termini omnes evaneſcunt, ſeu fiunt nihilo æquales

Igitur 20 eſt radix quæſita.

Similiter ſubſtituta quantitate intermedia inter 25, & 51 nempe 31 fit +. Ergo 31 eſt major radice quæſita. Sed ſubſtituto 30 fiet nihilum. Ergo 30 eſt ſecunda radix.

EXEMPLUM II.

Sit $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$
Prima Æquatio limitum reperitur
$4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$

Secun-

Secunda $xx - 40x + 333 = 0$
Tertia $x - 20 = 0$
Limites ergo ſecundæ ſunt o , 20 , 41
Subſtitutis ergo quantitatibus intermediis.
Prima radix invenietur inter 10 , & 15.
Altera inter 28 , & 29.
Radices igitur ſunt irrationales.
Limites ergo radicum in cubica ſunt
o. 10. 28. 3997.
Et facta ſubſtitutione inveniuntur radices
Prima inter 5 , 6.
Secunda inter 21 , 22.
Tertia inter 34 , 35.
Sint ergo limites Æquationis propoſitæ
o , 6, 21 , 34 , 14938.
Subſtituendo jam quantitates intermedias inveniuntur radices
Prima inter o, 1.
Secunda inter 12 , 13.
Tertia inter 32 , 33.
Quarta inter 34 , 35.
Sunt adeo omnes irrationales.

EXEMPLUM III.

Sit Æquatio $x^3 - 7x + 6 = 0$
Transmutetur in aliam, cui adſint ſinguli termini cum ſignis alternis: hoc eſt, ponendo pro radice maximum coefficientem negativum auctum unitate minus incognito quodam z.

Ponatur ergo $8 - z = x$
Et fiet $z^3 - 24zz + 185z - 462 = 0$
Cujus inveniendæ radices.

Prima Æquatio limitum eſt

$$zz - 16z + \frac{185}{3} = 0$$

Secunda $z - 8 = 0$

Limites igitur pro quadratica ſunt

0, 8, 17.

Et ſubſtituendo quantitates intermedias invenitur

Prima radix inter 6, 7.

Ponantur limites primæ radicis quæſitæ in cubica 0, 6.

Et quoniam ſubſtituendo 6 fit nihilum,

Erit radix quæſita $= 6$

Diviſa ergo Æquatione per $z - 6$

Prodit $zz - 18z + 77 = 0$

Cujus radices methodo vulgari per cap. 3. hujus inveniuntur 7, & 11

Radices igitur Æquationis cubicæ

z^3 &c. erunt 6, 7, 11.

Quoniam vero $8 - z = x$

Erunt radices Æquationis propoſitæ 2, 1, $-$ 3

Quod erat inveniendum.

EXEMPLUM IV.

Sit $x^3 - 19x + 30 = 0$

Transmutetur in aliam, cui adſint omnes termini cum ſignis alternis ponendo nempe $20 - z = x$

Et erit $z^3 - 60zz + 1181z - 7650 = 0$.

Æquatio prima Limitum eſt

$3zz - 120z + 108 = 0$

Secunda $6z - 120 = 0$

Ex qua fit $z = 20$

Limites ergo Æquationis quadraticæ ſunt 0,20,121,

Per quos invenitur

Prima radix inter 6, 7. Secun-

Secunda inter 54, 55.

Sunt ergo limites primæ radicis in cubica o, 6.

Et quoniam ſubſtituto 3 fit nihilum, erit 3 prima radix. Diviſa ergo Æquatione per

$x - 3$, fiet $xx + 3x - 10 = 0$

Qua reſoluta fiunt radices 2, − 5. Erunt ergo radices Æquationis cubicæ x^3 &c. 2, 3, − 5.

Et quia $20 - z = x$

Erunt radices in Æquatione z^3 &c. 18, 17, 25.

EXEMPLUM V.

Pro Æquationibus, in quibus dantur plures radices æquales.

Sit $x^4 - 6x^3 + 12xx - 10x + 3 = 0$

Æquationes limitum.

Prima $4x^3 - 18xx + 24x - 10 = 0$

Secunda $12xx - 36x + 24 = 0$

Tertia $24x - 36 = 0$

In qua fit $x = \frac{3}{2}$

Erit ergo prima radix Æquationis quadraticæ inter o, $\frac{3}{2}$.

Et facta ſubſtitutione invenitur 1.

Prima ergo radix Æquationis cubicæ eſt inter o, 1.

Sed ſubſtituendo Limitem 1, fit nihilum.

Ergo 1 eſt radix Æquationis cubicæ, cumque radix Æquationis quadraticæ ſit pariter 1; erunt in cubica duæ radices = 1; & in biquadratica tres.

Diviſa ergo biquadratica per cubum ex radice $x - 1$ invenitur quarta radix 3.

Igitur radices quæſitæ ſunt 1, 1, 1, 3.

EXEMPLUM VI.

Pro radicibus imaginariis.

SIt $x^4 - 6x^3 + 17xx - 24x + 18 = 0$
Erunt Æquationes limitum
Prima $4x^3 - 18xx + 34x - 24 = 0$
Secunda $12xx - 36x + 34 = 0$
Tertia $24x - 36 = 0$
In qua reperitur $x = \frac{3}{2}$

Limites ergo pro quadratica ſunt $0, \frac{3}{2}$.

Cum autem ſubſtituto 0 fiat + & ſubſtituto quoque $\frac{3}{2}$ fiat +, $\frac{3}{2}$ non erit Limes; quod argumento eſt radices quadraticas eſſe imaginarias.

Erunt ergo imaginariæ etiam in cubica; & una realis. Quæ ut inveniatur, (cum non habeantur limites in quadratica,) reperienda erit inter 0, & 7 nempe maximæ incognitæ coefficientem unitate auctum, ut ſupra dictum eſt, & reperietur 1, & 2.
Ponantur ergo limites Æquationis propoſitæ 0, 2, 25.
Sed cum ſubſtituto 2 fiat +, cum deberet fieri −, 2 non erit Limes. Igitur etiam aliæ duæ radices ſunt imaginariæ, & conſequenter Æquatio involvit impoſſibilitatem.

SCHO-

SCHOLION.

Methodus Limitum adhiberi poteſt absque ulla transmutatione Æquationis; ſed quia praxis facilior, ideo traſmutatione uſi ſumus.

Methodus Newtoni ad inveniendos Limites.

Summa methodi in eo poſita eſt, ut ex Æquatione data deducantur ordine Æquationes limitum, ut ſupra explicatum eſt. Tum vero, qui numerus poſitivus ſubſtitutus loco incognitæ in ſingulis illis Æquationibus relinquit poſitivam ſummam, is erit major omni poſitiva radice Æquationis datæ. Qui vero numerus negativus dat poſitivam ſummam in Æquationibus parium dimenſionum, ſed negativam in imparium, is erit major quacunque negativa.

Sit exempli gratia

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$$

Erunt Æquationes limitum methodo ante dicta

I. $5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 0$

II. $x^3 - \frac{6xx}{5} - 3x + 3 = 0$

III. $xx - \frac{4x}{5} - 1 = 0$

IV. $10x - 4 = 0$

Si in ſingulis hiſce Æquationibus ſubſtituatur 1 loco incognitæ, non fit ubique ſumma poſitiva. Ea autem fit, ſi ſubſtituatur 2. Igitur 2 erit limes, quem nulla ex poſitivis datæ Æquationis radicibus transgreditur.

quemlibet, ut habeatur Æquatio, cujus radices minus differant a ſuis limitibus.

Sit v. g. $xx - 20x + 65 = 0$

Cujus prima radix inventa ſit inter 4, & 5. Multiplicentur radices per 1000, *per Probl. IV. Cap. II. hujus*, & erit nova Æquatio

$$yy - 20000y + 65000000 = 0$$

Cujus prima radix eſt inter 4000, & 5000. Adſumptis ergo limitibus propioribus, invenietur inter 4094. & 4095.

Erit ergo radix quæſita inter $\frac{4094}{1000}$ & $\frac{4095}{1000}$

Altera Methodus.

Sit prior Æquatio $xx - 20x + 65 = 0$. cujus radices ſunt inter 4 & 5.

Fiat $4 = x - y$

Hoc eſt: exprimatur per y fractio, qua x excedit limitem 4.

Erit $4 + y = x$

Erit $xx = yy + 8y + 16$

$- 20x = \quad - 20y - 80$

$65 = \quad + 65$

Conſequenter $yy - 12y + 1 = 0$

Et abjecto yy ob parvitatem, eſt enim yy quadratum fractionis; fractiones autem elevatæ ad poteſtates ſemper fiunt quantitates minores, *ut ex parte prima hujus liquet*.

Habebitur adeo $- 12y + 1 = 0$

Et fit $y = \frac{1}{12}$

Ponatur rurſus $4 + \frac{1}{12} = x - y$, erit $4 + \frac{1}{12} + y = x$

Seu $\frac{49}{12} + y = x$

Erit $xx = yy + \frac{98y}{12} + \frac{2401}{144}$

$-20x = \quad -20y - \frac{980}{12}$

$65 = \quad + 65$

Et propter parvitatem abjiciendo yy

Erit $71y = \frac{2002}{1728}$

Unde habetur $y = \frac{2002}{122688}$

Erit ergo $x = 4 + \frac{1}{12} + \frac{2002}{122688}$

Quod licet continuare in infinitum.

Aliud Exemplum per fractiones decimales.

Sit ſecundo $xx - 5x - 31 = 0$

Et quæratur prima radix inter 8, & 9.

Fiat $8 + y = x$

Et erit $y = \frac{7}{11}$, aut in decimalibus 0.6 quam proxime

Fiat rurſus $8 + 0\ 6 + y = x$

Seu $8.\ 6 + y = x$

Et fiet $y = 0.\ 0032$

Igitur $x = 8 + 0.6 + 0.\ 0032$

Et ſic in infinitum.

Univerſaliter.

Sit Æquatio biquadratica quæcunque x^4

$$x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0$$

Poſito limite f

Fiat $f + y = x$

Et fiet nova Æquatio

$$y^4 - ny^3 - pyy + qy - r = 0$$

In qua $y = \frac{r}{y^3 - nyy - py + q}$

Si in allata Æquatione negligantur altiores dimenſiones de y, ut quantitates ſatis parvæ, fiet $qy - r = 0$.

Et erit $y = \frac{r}{q}$

Quo valore ſubſtituto in formula priore

Fit $y = \frac{q^3 r}{qq - pqqr - nqrr + r^3}$

Ex qua formula educitur valor y.

EXEMPLUM.

Sit $x^4 - 7x^3 + 14xx - 7x + 1 = 0$

Et limes proxime minor ſit 4

Fiat ergo $4 + y = x$

Erit $y^4 + 9y^3 + 26yy - 85y + 5 = 0$

In formula ergo generali

$n = -9$

$p = -26$

$q = -85$

$r = -5$

Quibus valoribus ſubſtitutis in formula fit

$y = \frac{3070625}{965475}$

Hac igitur methodo radices prope veras invenire poſſumus, dum e numeris radicem quamvis extrahimus, quam exacte non continet.

SECTIO II.

APPLICATIO ANALYSIS AD PROBLEMATA ALTIORUM DIMENSIONUM.

CAPUT I.

Reſolutio Problematum duarum dimenſionum.

PROBLEMA I.

INvenire duos numeros, quorum quadratorum differentia, & ſumma ſit data.

Sit differentia quadratorum $= 12$

Et ſumma $= 20$

Numerus primus x, ſecundus y.

Igitur per primam conditionem $xx - yy = 12$ A

Per ſecundam $xx + yy = 20$ B

In prima æquatione habetur $xx = 12 + yy$

Subſtituendo erit in B $12 + 2yy = 20$ B

Et fit $yy = 4$

Extrahendo radicem quadratum per c. 3. præc. ſect.

Erit $y = \pm 2$

Si ſumatur $y = 2$; erit $x = 4$

Si vero ſumatur $y = -2$, erit $x = -4$

Univerſaliter.

Invenire duos numeros, ut differentia quadratorum ſit a, & ſumma eorumdem ſit b.

Per primam conditionem $xx - yy = a$ A

Per ſecundam $xx + yy = b$

In prima $xx = yy + a$

Sub-

Subſtituendo in ſecunda erit $2yy + a = b$
Et fit $yy = \frac{b - a}{2}$

Extrah. rad. quadrat. $y = \pm \sqrt[2]{\frac{b - a}{2}}$

PROBLEMA II.

INvenire duos numeros, quorum ſumma ſit 8, & productum 12.

Numerus primus x, ſecundus y.
Per primam conditionem $x + y = 8$ A
Per ſecundam $xy = 12$ B
In prima A eſt $x = 8 - y$
Subſtituendo in ſecunda B erit $8y - yy = 12$
Et mutando ſigna ut yy ſit poſitivum
Erit : $yy - 8y = -12$
Compleatur quadratum (*)
Et erit $yy - 8y + 16 = 16 - 12$
Hoc eſt : $yy - 8y + 16 = 4$
Extra rad. erit $y - 4 = \pm 2$
Et fit $y = 4 \pm 2$
Si ſumatur $y = 6$; erit $x = 2$
Si ſumatur $y = 2$; erit $x = 6$

Univerſaliter.

Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit a, & productum b

Numeri quæſiti x, & y
Ergo $x + y = a$ A
Et $xy = b$ B
In prima æquatione $x = a - y$
Subſtituendo in ſecunda $ay - yy = b$ Seu

(*) *Per illa, quæ Parte II. Sect. I. Cap. III. dicta ſunt.*

Seu $yy - ay = - b$

Complendo quadratum

$$yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - b$$

Extrah. rad. fit $y - \frac{a}{2} = \pm\left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right)$

Et $y = \frac{a}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{aa}{4} - b}\right)$

PROBLEMA III.

INvenire duos numeros, quorum ſumma ſit 4, & quadratorum ſumma 40.

Numeri quæſiti x, & y

Ergo $x + y = 4$ A

Et $xx + yy = 40$ B

In Æquatione A habetur $x = 4 - y$

Hoc eſt: $xx = 16 - 8y + yy$

Subſtituendo in B $16 - 8y + 2yy = 40$

Seu per 2 divid. $8 - 4y + yy = 20$

Et conſequenter $yy - 4y = 12$

Et complendo quadratum

Erit $yy - 4y + 4 = 12 + 4 = 16$

Ergo Extrah. rad. $y - 2 = \pm 4$

Et fit $y = 2 \pm 4$

Si y ſit 6; erit $x = - 2$

Si y ſit $- 2$; erit $x = 6$

Quorum ſumma eſt 4; ſumma autem quadratorum

Nempe $36 + 4 = 40$

Uni-

Univerſaliter.

Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit a, ſumma vero quadratorum b

Numeri quæſiti x, & y

Ergo $x + y = a$ A

Et $xx + yy = b$ B

In prima A habetur $x = a - y$

Conſequenter $xx = aa - 2ay + yy$

Subſtituendo ergo in ſecunda B

Erit $aa - 2ay + 2yy = b$

Id eſt $yy - ay = \frac{b - aa}{2}$

Complendo quadratum habebitur

$$yy - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} + \frac{b - aa}{2} = \frac{b}{2} - \frac{aa}{4}$$

Ergo extrah. rad. $y - \frac{a}{2} = \pm (\sqrt{\frac{b}{2} - \frac{aa}{4}})$

Et $y = \frac{a}{2} \pm (\sqrt{\frac{b}{2} - \frac{aa}{4}})$

PROBLEMA IV.

Duo mercatores compoſuerunt aureos 12, lucrum vero amborum erat 80 aureorum.

Primus ſuis aureis lucratus eſt aureos 20 intra 2 menſes, ſecundus 72 intra 4 menſes, quæritur, quot aureos ſinguli contulerint.

Datum primi $= x$

Datum ſecundi $= 12 - x$

Datum compoſitum primi propter tempus $= 2x$

Datum compoſitum ſecundi $= 48 - 4x$

Lu-

Lucrum primi $= 20 - x$
Lucrum ſecundi $= 72 - 12 + x = 60 + x$

Quoniam autem lucra debent eſſe in ratione datorum compoſitorum; erit $20 - x : 60 + x = 2x : 48 - 4x$.

Hoc eſt multipl. media & extrema
$- 80x + 4xx + 960 - 48x = 120x + 2xx$
Et reducendo erit $xx - 124x = - 480$
Complendo quadratum habebitur
$xx - 124x + 3844 = 3844 - 480 = 3364$
Et extrahendo radicem $x - 62 = \pm 58$

Igitur $x = 62 \pm 58$

Si ſumatur $x = 4$, erit datum alterius $= 8$
Sed ſi ſit $x = 120$, datum alterius $= - 108$
in quo caſu deducitur ſecundum non ſolum non contuliſſe pecuniam; ſed lucratum eſſe ſuper datum alterius, quantum importat pars 108.

PROBLEMA V.

PEtro ſunt duo genera mercium. Libra primi generis venit pluris 3 florenis, quam libra ſecundi generis, libræ autem ſunt 15, & idem eſt impendium in utraque merce, nempe, flor. 30. Quæritur quantum valeat libra una utriusque mercis, & quot libræ unius quot alterius comparatæ fuerint?

Pretium libræ pro prima merce $= x + 3$
Pretium pro ſecunda $= x$
Numerus librarum primæ mercis $= y$
Secundæ $= 15 - y$
Pretium totale primæ mercis $= xy + 3y$
Pretium totale ſecundæ $= 15x - xy$

Pro-

Propter primam conditionem $xy + 3y = 30$ A
Propter ſecundam $15x - xy = 30$ B
In prima ergo $y = \frac{30}{x + 3}$
Igitur ſubſtituendo in ſecunda
Erit $15x - \frac{30x}{x + 3} = 30$
Et tollendo fractionem
$xx - x = 6$
Complendo quadratum, ſupponendo nempe $-\frac{1}{2}x$ eſſe multiplicatum per 1.
$xx - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$
Extrah. rad. erit $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$
Et fit $x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$
Nempe $x = 3$, vel $- 2$
Si ponatur $x = 3$; erit $y = 5$
Si ponatur $x = - 2$; $y = 30$

SCHOLION.

Quiſque poterit ſuo Marte hæc univerſalia facere ſubſtituendo pro numeris literas.

PROBLEMA VI.

Datis tribus numeris 5, 4, 6 invenire quartum contraharmonicum.
Numerus quæſitus x
Ergo ob conditionem problematis (*)
$5 - 4 : 6 - x = x : 5$ Mul-

(*) *Vide defin. 3. Cap. III. Sect. II. Part. I.*

Multipl. media & extrema fiet $5 = 6x - xx$
Seu $xx - 6x = -5$
Complendo quadratum per cap. 3. Part. II. Sect. I.
Erit $xx - 6x + 9 = 9 - 5 = 4$
Extrahendo radicem quadratam fit $x - 3 = \pm\sqrt{4}$

Seu $x - 3 = \pm 2$

Et fit $x = \pm 2 + 3$

Duo ergo poſſunt eſſe numeri quæſiti contraharmonici 1, & 5.

Univerſaliter.

Datis tribus a, b, c, invenire quartum contraharmonicum.

Quantitas quæſita x
Ergo $a - b : c - x = x : a$
Ergo $aa - ab = cx - xx$.
Seu $xx - cx = ab - aa$
Complendo quadratum
Erit $xx - cx + \frac{cc}{4} = ab - aa + \frac{cc}{4}$

Extrahendo [illegible]em qu[illegible]ratam
Erit $x -$ [illegible] $aa + \frac{cc}{4})$

E[illegible] $ab - aa + \frac{cc}{4})$

CA-

CAPUT II.

Applicatio Analyſis ad Problemata trium & quatuor Dimenſionum.

PROBLEMA I.

TRes ſocii compoſuerunt ſummam aureorum 60, primus pro anno 1, ſecundus pro annis 2, tertius pro annis 3. Hac ſumma compoſita lucrati ſunt aureos 130. Elapſo tempore diviſa eſt hæc ſumma in hos tres ſocios. Primo contigerunt aurei 15; ſecundo 40; tertio 75. Quæritur quot ſinguli contulerint aureos.

Datum primi $= x$
ſecundi $= y$
tertii $= 60 - x - y$

Datum primi compoſitum ob annum $1 = x$
Secundi $= 2y$
Tertii $= 180 - 3x - 3y$

Lucrum primi $= 15 - x$
Lucrum ſecundi $= 40 - y$
Lucrum tertii $= 75 - 60 + x + y$.
Hoc eſt $= 15 + x + y$

Quoniam autem lucra debent eſſe in ratione datorum compoſitorum, erit ut datum compoſitum primi ad datum compoſitum ſecundi, ita lucrum primi ad lucrum ſecundi; & ut datum compoſitum primi ad datum compoſitum tertii; ita lucrum primi ad tertii. Habentur ergo hæ proportiones

$x : 2y = 15 - x : 40 - y$

Et $x : 180 - 3x - 3y = 15 - x : 15 + x + y$

Ex prima proportione ſit Æquatio:

$40x - xy = 30y - 2xy$ A

Seu $40x = 30y - xy$

Ex proportione ſecunda habetur:

$15x + xx + xy = 2700 - 45x - 45y - 180x + 3xx + 3xy$ B

In Æquatione A

$$y = \frac{40x}{30 - x}$$

Subſtituendo & reducendo hunc valorem in Æquatione B & transponendo ad unam partem erit:

$x^3 - 190xx + 5850x - 40500 = 0$

Ut habeatur Æquatio ſimplicior, dividantur radices per 10; ſeu fiat $\frac{x}{10} = z$ hoc eſt, $x = 10z$

Et ſubſtituendo in Æquatione loco x

Erit $1000z^3 - 19000z^2 + 58500z - 40500 = 0$

Et dividendo per 100

Erit $10z^3 - 190z^2 + 585z - 405 = 0$

Et porro dividendo per 10 fiet:

$$z^3 - 19zz + \frac{585z}{10} - \frac{405}{10} = 0$$

Sive $z^3 - 19zz + \frac{117z}{2} - \frac{81}{2} = 0$

Per methodum limitum multiplicentur termini Æquationis per 3, 2, 1, 0, & fiet $3zz - 38z + \frac{117}{2} = 0$

Quæ ſi reſolvatur, dabit radices imaginarias.

Ergo

Ergo nullum limitem habet ad reſolvendam Cubicam. Radix ergo realis Cubicæ invenienda eſt inter o, & maximum coefficientem negativum $\frac{81}{2}$

Subſtituto ergo 20; quia dat ſignum + erit 20 major radice quæſita, item quia ſubſtitutis 10, 5, & 2 adhuc prodit ſignum + erunt etiam hi majores radice.

At ſubſtituto 1 fit nihilum, erit ergo radix $= 1$, hoc eſt $z = 1$.

Quoniam ergo $z = 1$, & $x = 10z$ erit $x = 10$

Quo valore ſubſtituto in Æquationibus primis reperietur datum primi $= 10$

Secundi $= 20$

Tertii $= 30$

PROBLEMA II.

Petrus debet Paulo penſionem annuam a ſolvendam per annos n, habeatur autem ratio uſuræ annuæ, & ipſius uſuræ creſcentis ſingulis annis ut $1 : r$; quæritur, quanta ſit ſumma pecuniæ Pauli ſine uſura.

Sit pecunia quæſita x

Anno ergo primo completo pecunia ob rationem uſuræ, erit $= rx$, hoc eſt, ut $1 : r = x$ ad quartum aliquem

Sed quia detrahitur ab hac ſumma penſio annua a, remanebit $rx - a$

Et anno ſecundo erit $rrx - ra - a$. ob rationem nempe $1 : r$, & ablationem penſionis annuæ a.

Et anno tertio $r^3 x - rra - ra - a$

Anno denique n erit $r^n x$

$r^{n} x, - r^{n-1} a, - r^{n-2} a, - r^{n-3} a \ldots - r^{n-n} a$

Cumque completis annis n ſit ſolutum debitum, conſequenter debitum Petri fiat $= 0$ erit Æquatio

$$r^{n} x, - r^{n-1} a - r^{n-2} a, - r^{n-3} a, \ldots r^{n-n} a = 0$$

Hoc eſt

$$r^{n} x = r^{n-1} a + r^{n-2} a + r^{n-3} a \ldots + r^{n-n} a$$

Seu $\frac{r^{n} x}{a} = r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} \ldots + r^{n-n}$.

Cum vero alterum hujusce Æquationis membrum ſit Geometrica Series, cujus ſumma *per Probl. I. Cap. II. Sect. III. Part. I.*

eſt $\frac{r^{n} - 1}{r - 1}$

Erit ergo $$\frac{r^{n} x}{a} = \frac{r^{n} - 1}{r - 1}$$

Et multipl. per a, & dividendo per r^{n}

Erit $$x = \frac{ar^{n} - a}{r^{n+1} - r}$$

Ponatur nunc numerus annorum 3, annua penſio 100; & augeatur ſumma ut 21 : 20

Erit $a = 100$; $n = 3$; $r = \frac{21}{20}$

Et

Et ſit $x = \frac{100r^3 - 100}{r^4 - r^3}$

$100r^3 - 100 = \frac{1261}{80}$

$r^4 - r^3 = \frac{9261}{160000}$

Ergo $x = \frac{2522000}{9261} = 272 + \frac{3008}{9261}$

SCHOLION.

SI detur ſumma pecuniæ, tempus, & ratio uſuræ, quæraturque penſio ſolvenda; tum ſubſtitutis numeris in Æquatione quæratur quantitas a, quæ dabitur per Æquationem ſimplicem.

Si vero detur ſumma, tempus, & annua penſio, & quæratur ratio uſuræ, tum Æquatio ad altiores dimenſiones exurgit, eoque altiores fiunt dimenſiones, quo magis tempus creverit.

Sit ſumma ſolvenda flor. 20, penſio annua 10, anni 3, & fiet Æquatio

$2r^4 - 3r^3 + 1 = 0$

At ſi anni ſint 8; fiet

$2r^9 - 3r^8 + 1 = 0$

Solutionem Arithmeticam lectori ſtudioſo relinquimus.

PROBLEMA III.

SUmma pecuniæ augetur in ratione $1 : r$ & ſpatio annorum 4, habetur uſura 1000. Quæritur ſuma?

Sit ſumma x, &
I. anno erit rx
II. rrx
III. $r^3 x$
IV. $r^4 x$

Itaque ſumma cum uſura poſt quatuor annos Erit $r^4 x$
Sed uſura poſt 4 annos elapſos eſt 1000
Ergo $r^4 x - x = 1000$
Et fit $x = \frac{1000}{r^4 - 1}$
Si ſumma augeatur ut 20 : 21
Erit ſumma prima quæſita $\frac{160000000}{34481}$

PROBLEMA IV.

Data ſumma & uſura, datoque tempore, invenire rationem augmenti ex uſura.

SIt ſumma data 10000, & uſura 100 tempore 4; & ratio augmenti quæſita ſit $1 : x$
Erit ſumma anno quarto $= 10000x^4$
Igitur $10000x^4 = 10000 + 100 = 10100.$
Et fit $x^4 = \frac{101}{100}$

Con-

Conſequenter extrahendo radicem biquadraticam erit $x = \sqrt[4]{\frac{101}{100}}$

SCHOLION.

Qui uſum Logarithmorum noverit, is facilius per Logarithmos ſolvet.

Erit enim $4\,L\,x = L\,101 - L\,100$

Et conſequenter $L\,x = \frac{L\,101 - L\,100}{4}$

PROBLEMA V.

Summa pecuniæ augetur ut $1 : r$

Quæritur tempus, quo data ſumma C fiat mC.

Quoniam ſumma C ſingulis annis creſcit ut $1 : r$ erit

Anno primo	=	rC
Secundo	=	rrC
Tertio	=	r^3C
Quarto	=	r^4C
Anno ergo x	=	r^xC

Sed cum anno x fieri debeat $= mC$

Ergo $r^xC = mC$

Et erit $r^x = m$

Oportet ergo elevare r ad potentiam illam, ad quam elevata faciat quantitatem æqualem m.

Lucrum primi $= 20 - x$

Lucrum ſecundi $= 72 - 12 + x = 60 + x$

Quoniam autem lucra debent eſſe in ratione datorum compoſitorum; erit $20 - x : 60 + x = 2x : 48 - 4x$.

Hoc eſt multipl. media & extrema

$$-80x + 4xx + 960 - 48x = 120x + 2xx$$

Et reducendo erit $xx - 124x = -480$

Complendo quadratum habebitur

$$xx - 124x + 3844 = 3844 - 480 = 3364$$

Et extrahendo radicem $x - 62 = \pm 58$

Igitur $x = 62 \pm 58$

Si ſumatur $x = 4$, erit datum alterius $= 8$

Sed ſi ſit $x = 120$, datum alterius $= -108$

in quo caſu deducitur ſecundum non ſolum non contuliſſe pecuniam; ſed lucratum eſſe ſuper datum alterius, quantum importat pars 108.

PROBLEMA V.

PEtro ſunt duo genera mercium. Libra primi generis venit pluris 3 florenis, quam libra ſecundi generis, libræ autem ſunt 15, & idem eſt impendium in utraque merce, nempe, flor. 30. Quæritur quantum valeat libra una utriusque mercis, & quot libræ unius quot alterius comparatæ fuerint?

Pretium libræ pro prima merce $= x + 3$

Pretium pro ſecunda $= x$

Numerus librarum primæ mercis $= y$

Secundæ $= 15 - y$

Pretium totale primæ mercis $= xy + 3y$

Pretium totale ſecundæ $= 15x - xy$

Pro-

Propter primam conditionem $xy + 3y = 30$ A
Propter ſecundam $15x - xy = 30$ B
In prima ergo $y = \frac{30}{x+3}$

Igitur ſubſtituendo in ſecunda
Erit $15x - \frac{30x}{x+3} = 30$

Et tollendo fractionem
$xx - x = 6$

Complendo quadratum, ſupponendo nempe $-1x$ eſſe multiplicatum per 1.

$xx - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

Extrah. rad. erit $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$

Et fit $x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

Nempe $x = 3$, vel -2
Si ponatur $x = 3$; erit $y = 5$
Si ponatur $x = -2$; $y = 30$

SCHOLION.

Quiſque poterit ſuo Marte hæc univerſalia facere ſubſtituendo pro numeris literas.

PROBLEMA VI.

Datis tribus numeris 5, 4, 6 invenire quartum contraharmonicum.

Numerus quæſitus x
Ergo ob conditionem problematis (*)
$5 - 4 : 6 - x = x : 5$ Mul-

(*) *Vide defin. 3. Cap. III. Sect. II. Part. I.*

Multipl. media & extrema fiet $5 = 6x - xx$
Seu $xx - 6x = -5$
Complendo quadratum per cap. 3. Part. II. Sect. 1.
Erit $xx - 6x + 9 = 9 - 5 = 4$
Extrahendo radicem quadratam fit $x - 3 = \pm \sqrt{4}$

Seu $x - 3 = \pm 2$

Et fit $x = \pm 2 + 3$

Duo ergo poſſunt eſſe numeri quæſiti contraharmonici 1, & 5.

Univerſaliter.

Datis tribus a, b, c, invenire quartum contraharmonicum.

Quantitas quæſita x
Ergo $a - b : c - x = x : a$
Ergo $aa - ab = cx - xx$.
Seu $xx - cx = ab - aa$
Complendo quadratum
Erit $xx - cx + \frac{cc}{4} = ab - aa + \frac{cc}{4}$

Extrahendo radicem quadratam
Erit $x - \frac{c}{2} = \pm (\sqrt{ab - aa + \frac{cc}{4}})$

Et fit $x = \frac{c}{2} \pm (\sqrt{ab - aa + \frac{cc}{4}})$

CA-

CAPUT II.

Applicatio Analyſis ad Problemata trium & quatuor Dimenſionum.

PROBLEMA I.

TRes ſocii compoſuerunt ſummam aureorum 60, primus pro anno 1, ſecundus pro annis 2, tertius pro annis 3. Hac ſumma compoſita lucrati ſunt aureos 130. Elapſo tempore diviſa eſt hæc ſumma in hos tres ſocios. Primo contigerunt aurei 15; ſecundo 40; tertio 75. Quæritur quot ſinguli contulerint aureos.

Datum primi $= x$
ſecundi $= y$
tertii $= 60 - x - y$

Datum primi compoſitum ob annum $1 = x$
Secundi $= 2y$
Tertii $= 180 - 3x - 3y$

Lucrum primi $= 15 - x$
Lucrum ſecundi $= 40 - y$
Lucrum tertii $= 75 - 60 + x + y.$
Hoc eſt $= 15 + x + y$

Quoniam autem lucra debent eſſe in ratione datorum compoſitorum, erit ut datum compoſitum primi ad datum compoſitum ſecundi, ita lucrum primi ad lucrum ſecundi; & ut datum compoſitum primi ad datum compoſitum tertii; ita lucrum primi ad lucrum tertii. Habentur ergo hæ proportiones

$x : 2y = 15 - x : 40 - y$

Et $x : 180 - 3x - 3y = 15 - x : 15 + x + y$

Ex prima proportione fit Æquatio:

$40x - xy = 30y - 2xy$ A

Seu $40x = 30y - xy$

Ex proportione ſecunda habetur:

$15x + xx + xy = 2700 - 45x - 45y - 180x + 3xx + 3xy$ B

In Æquatione A

$$y = \frac{40x}{30 - x}$$

Subſtituendo & reducendo hunc valorem in Æquatione B & tranſponendo ad unam partem erit:

$x^3 - 190xx + 5850x - 40500 = 0$

Ut habeatur Æquatio ſimplicior, dividantur radices per 10; ſeu fiat $\frac{x}{10} = z$ hoc eſt, $x = 10z$

Et ſubſtituendo in Æquatione loco x

Erit $1000z^3 - 19000z^2 + 58500z - 40500 = 0$

Et dividendo per 100

Erit $10z^3 - 190z^2 + 585z - 405 = 0$

Et porro dividendo per 10 fiet:

$$z^3 - 19zz + \frac{585z}{10} - \frac{405}{10} = 0$$

Sive $z^3 - 19zz + \frac{117z}{2} - \frac{81}{2} = 0$

Per methodum limitum multiplicentur termini Æquationis per 3, 2, 1, 0, & fiet $3zz - 38z + \frac{117}{2} = 0$

Quæ ſi reſolvatur, dabit radices imaginarias.

Ergo

Ergo nullum limitem habet ad reſolvendam Cubicam. Radix ergo realis Cubicæ invenienda eſt inter o, & maximum coefficientem negativum $\frac{81}{2}$

Subſtituto ergo 20; quia dat ſignum + erit 20 major radice quæſita, item quia ſubſtitutis 10, 5, & 2 adhuc prodit ſignum + erunt etiam hi majores radice.

At ſubſtituto 1 fit nihilum, erit ergo radix $= 1$, hoc eſt $z = 1$.

Quoniam ergo $z = 1$, & $x = 10z$ erit $x = 10$

Quo valore ſubſtituto in Æquationibus primis reperietur datum primi $= 10$

Secundi $= 20$

Tertii $= 30$

PROBLEMA II.

PEtrus debet Paulo penſionem annuam a ſolvendam per annos n, habeatur autem ratio uſuræ annuæ, & ipſius uſuræ creſcentis ſingulis annis ut $1 : r$; quæritur, quanta ſit ſumma pecuniæ Pauli ſine uſura.

Sit pecunia quæſita x

Anno ergo primo completo pecunia ob rationem uſuræ, erit $= rx$, hoc eſt, ut $1 : r = x$ ad quartum aliquem

Sed quia detrahitur ab hac ſumma penſio annua a, remanebit $rx - a$

Et anno ſecundo erit $rrx - ra - a$. ob rationem nempe $1 : r$, & ablationem penſionis annuæ a.

Et anno tertio $r^3 x - rra - ra - a$

Anno denique n erit

 $\frac{n}{rx}$

$$r^{n} x, - r^{n-1} a, - r^{n-2} a, - r^{n-3} a \ldots - r^{n-n} a$$

Cumque completis annis n ſit ſolutum debitum, conſequenter debitum Petri fiat $=$ o erit Æquatio

$$r^{n} x, - r^{n-1} a - r^{n-2} a, - r^{n-3} a, \ldots r^{n-n} a = 0$$

Hoc eſt

$$r^{n} x = r^{n-1} a + r^{n-2} a + r^{n-3} a \ldots + r^{n-n} a$$

Seu $\frac{r^{n} x}{a} = r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} \ldots + r^{n-n}$.

Cum vero alterum hujusce Æquationis membrum ſit Geometrica Series, cujus ſumma *per Probl. I. Cap. II. Sect. III. Part. I.*

eſt $\frac{r^{n} - 1}{r - 1}$

Erit ergo $$\frac{r^{n} x}{a} = \frac{r^{n} - 1}{r - 1}$$

Et multipl. per a, & dividendo per r^{n}

Erit $$x = \frac{ar^{n} - a}{r^{n+1} - r}$$

Ponatur nunc numerus annorum 3, annua penſio 100; & augeatur ſumma ut 21 : 20

Erit $a = 100$; $n = 3$; $r = \frac{21}{20}$

Et

Et ſit $x = \frac{100r^3 - 100}{r^4 - r^3}$

$100r^3 - 100 = \frac{1261}{80}$

$r^4 - r^3 = \frac{9261}{160000}$

Ergo $x = \frac{2522000}{9261} = 272 + \frac{3008}{9261}$

SCHOLION.

SI detur ſumma pecuniæ, tempus, & ratio uſuræ, quæraturque penſio ſolvenda; tum ſubſtitutis numeris in Æquatione quæratur quantitas a, quæ dabitur per Æquationem ſimplicem.

Si vero detur ſumma, tempus, & annua penſio, & quæratur ratio uſuræ, tum Æquatio ad altiores dimenſiones exurgit, eoque altiores fiunt dimenſiones, quo magis tempus creverit.

Sit ſumma ſolvenda flor. 20, penſio annua 10, anni 3, & fiet Æquatio

$2r^4 - 3r^3 + 1 = 0$

At ſi anni ſint 8; fiet

$2r^9 - 3r^8 + 1 = 0$

Solutionem Arithmeticam lectori ſtudioſo relinquimus.

PROBLEMA III.

SUmma pecuniæ augetur in ratione $1:r$ & ſpatio annorum 4, habetur uſura 1000.' Quæritur ſum̃a?

Sit ſumma x, &
I. anno erit rx
II. rrx
III. r^3x
IV. r^4x

Itaque ſumma cum uſura poſt quatuor annos
Erit $r^4 x$
Sed uſura poſt 4 annos elapſos eſt 1000
Ergo $r^4x - x = 1000$
Et fit $x = \frac{1000}{r^4 - 1}$
Si ſumma augeatur ut 20 : 21
Erit ſumma prima quæſita $\frac{160000000}{34481}$

PROBLEMA IV.

Data ſumma & uſura, datoque tempore, invenire rationem augmenti ex uſura.

SIt ſumma data 10000, & uſura 100 tempore 4; & ratio augmenti quæſita ſit $1 : x$
Erit ſumma anno quarto $= 10000x^4$
Igitur $10000x^4 = 10000 + 100 = 10100.$
Et fit $x^4 = \frac{101}{100}$

Con-

Conſequenter extrahendo radicem biquadraticam erit $x = \sqrt[4]{\frac{101}{100}}$

SCHOLION.

QUi uſum Logarithmorum noverit, is facilius per Logarithmos ſolvet.

Erit enim $4 \text{ L } x = \text{L } 101 - \text{L } 100$

Et conſequenter $\text{L } x = \frac{\text{L } 101 - \text{L } 100}{4}$

PROBLEMA V.

SUmma pecuniæ augetur ut $1 : r$

Quæritur tempus, quo data ſumma C fiat mC.

Quoniam ſumma C ſingulis annis creſcit ut $1 : r$ erit

Anno primo $= r$C
Secundo $= rr$C
Tertio $= r^3$C
Quarto $= r^4$C

Anno ergo $x = r^x$C

Sed cum anno x fieri debeat $= m$C

Ergo $r^x\text{C} = m\text{C}$

Et erit $r^x = m$

Oportet ergo elevare r ad potentiam illam, ad quam elevata faciat quantitatem æqualem m.

SCHOLION.

HOc quoque problema expeditius ſolvitur per Logarithmos

Erit enim $x \, L \, r = L \, m$

Et fit $x = \frac{L \, m}{L \, r}$

Ponatur enim fieri ſumma dupla & augmentum eſſe ut 21 : 20

Erit tempus $x = \frac{L \, 2}{L \, 21 - L \, 20}$

Et ſi debeat fieri tripla

Erit tempus $x = \frac{L \, 3}{L \, 21 - L \, 20}$

Tempora ergo ſunt ut Logarithmi exponentium.

PROBLEMA VI.

TRes emuntur merces; ſumma unciarum eſt 13. Uncia ſecundæ valet primam + 10 flor. & uncia tertiæ valet ſecundam + 10 flor.

Impeduntur autem pro qualibet merce flor. 120.

Quæritur numerus, & valor unciarum pro ſingulis mercibus.

Numerus unciarum primæ mercis y

Secundæ z

Tertiæ $13 - y - z$.

Pretium unciæ in prima merce $= x$

Pretium in ſecunda $= x + 10$

Pretium in tertia $= x + 20$

Pretium totius mercis primæ $= xy$

Pretium ſecundæ $= xz + 10z$

Pre-

Pretium tertiæ $= 13x - xy - xz + 260 - 20y - 20z$

Sed $xy = 120$

Ergo $y = \frac{120}{x}$

Rurſus $xz + 10z = 120$

Ergo $z = \frac{120}{x + 10}$

Subſtituendo hoſce valores in pretio tertiæ mercis; reperietur Æquatio

$$13x^3 + 30xx - 4600x - 24000 = 0$$

quæ ut ſimplicior evadat, dividantur ejus radices per 10, ponendo $x = 10\,u$

Et erit $13u^3 + 3uu - 46u - 24 = 0$

Subſtituantur diviſores termini homogenei 1,2,3,4. & quoniam ſubſtituendo 2 omnes evaneſcunt termini; erit $u = 2$; conſequenter $x = 20$.

Pretia ergo mercium pro ſingulis unciis in prima ſunt 20, in ſecunda 30, in tertia 40. Cum autem $xy = 120$. Erit $y = 6$; Et quoniam pariter $xz + 10z = 120$

Erit $30z = 120$

Et ſit $z = 4$

Numerus ergo unciarum primæ mercis eſt 6, ſecundæ 4, tertiæ 3.

PROBLEMA VII.

Duo Mobilia per eandem viam ab eodem puncto, ſed diverſo tempore moventur. Primum peragrat ſpatia, quæ ſunt ut quadrata temporum; alterum ut cubi. Elapſum jam eſt tempus e.g. 4. horarum, ex quo primum moveri incœpit.

Quæritur tempus concurſus?

Sit tempus quæſitum x

Spatium peragratum a primo tempore $4 = 16$

Et ſpatium percurrendum tempore $4 + x$
$= 16 + 8x + xx$
Spatium percurrendum a ſecundo tempore $x = x^3$
Conſequenter $x^3 = 16 + 8x + xx$
Et fit Æquatio $x^3 - xx - 8x - 16 = 0$
Multiplicetur per 3, 2, 1, 0, & dividatur per x (*)
Et fit Æquatio limitum
$3xx - 2x - 8 = 0$
Multiplicetur hæc porro per 2, 1, 0. & dividatur per x.
Et fit $6x - 2 = 0$
Subſtituatur methodo Newtoni 1, 2, 3, 4, ſucceſſive in ſingulis Æquationibus, & quoniam ſubſtitutis 1, 2, 3, ſignum non evadit + neque ad nihilum redigitur, nullus ex iſtis erit limes. Subſtituto autem 4 evaneſcunt termini in Cubica. Igitur 4 eſt radix. Duplo ergo tempore fiet concurſus.

SCHOLION.

Si univerſaliter ponatur tempus a, & tempus quæſitum x, erit æquatio $x^3 = xx + 2ax + aa$
Ut ergo fiat radix rationalis, oportet Cubum æquari quadrato. Et quoniam numeri quadrato-cubici ſunt etiam quadrati, ſi $a + x$ ſit radix, ſeu latus quadrato-cubicum, erit ſemper incognita x rationalis.
Unde exurgit Methodus inveniendi in rationibus infinita tempora, quibus motum eſt ſolitarie primum Mobile.
Sit enim v. g. $x^3 = 729$
Et erit $x = 9$
Et $x + a = 27$. Et hinc $a = 18$.
Oportet ergo ut in hac hypotheſi tempus præcedens ſit $= 18$ PRO-

(*) *Per partem II. Sect. I. Cap. VII.*

PROBLEMA VIII.

Sint nunc ſpatia primi ut quadrata, & ſecundi ut ſuperſolida. Sitque tempus præcedens 28. Eadem methodo erit $x^5 = xx + 56x + 784 = 0$

Seu $x^5 - xx - 56x - 784 = 0$

Quærantur limites, & erunt Æquationes limitum

I. $5x^4 - 2x - 56 = 0$

II. $20x^3 - 2 = 0$

Subſtituto 1 non fit limes, nec ſubſtituto 2; aut 3.

Subſtituto autem 4 in Æquatione data, fit nihilum.

Ergo radix erit 2. Et poſt tempus 4 fiet concurſus.

PROBLEMA IX.

Unum mobile percurrit ſpatia ut poteſtates temporum. Alterum in progreſſione Arithmetica cujus terminorum differentia eſt 18.

Spatium vero primum utriusque æquale eſt, & poſt quatuor tempora fit pariter æquale.

Quæritur menſura hujus ſpatii?

Spatium quæſitum x.

Spatium peragratum a primo

Erit $x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

Spatium ſecundi $4x + 108$

Erit ergo $x^4 + x^3 + xx + x = 4x + 108$

Nempe $x^4 + x^3 + xx - 3x - 108 = 0$

Fiant Æquationes limitum

I. $4x^3 + 3xx + 2x - 3 = 0$

II. $12xx + 6x + 2 = 0$.

III. $24x + 6 = 0$

Jam ſubſtituto 1, & 2 non habentur limites
At ſubſtituto 3 fit nihilum. Ergo 3 eſt radix quæſita.
Tempus ergo primum $= 3$.

PROBLEMA X.

VIs primi agentis decreſcit ut quadrata diſtantiarum a centro. Agentis ſecundi vis ut cubi; vis tertii ut ſpatia $+ 2$

Quæritur punctum in quo ſumma virium primi & tertii eſt ad vim ſecundam ut $4 : 1$.

Diſtantia ſeu ſpatium quæſitum x

Erit Vis prima $\frac{1}{xx}$ Vis ſecunda $\frac{1}{x^3}$ Vis tertia $\frac{1}{x+2}$

Ergo per conditionem problematis

$$\frac{1}{xx} + \frac{1}{x+2} : \frac{1}{x^3} = 4 : 1$$

Erit ergo $\frac{1}{xx} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^3}$

Et tollendo fractiones

$$x^3 + xx - 2x - 8 = 0$$

Fiant Æquationes limitum: erit

Prima $3xx + 2x - 2 = 0$

Secunda $6x + 2 = 0$

Subſtituto 1 non fit limes, ſubſtituto vero 2 fit nihilum. Ergo 2 eſt æquationis radix. Reliquæ duæ ſunt imaginariæ.

Si debeat eſſe quintupla, fiet Æquatio.

$$x^3 + xx - 3x - 10 = 0$$

Cujus radix realis eſt ſurda nempe inter 2 & 3. Reliquæ ſunt imaginariæ.

FINIS.

IN-

INDEX CAPITUM.

PARS PRIMA.

SECTIO I.

Cap. I. *De primo Algorithmo numerico.* - pag. 14
Cap. II. *De primo Algorithmo literali.* - 23
Cap. III. *De poteſtatibus Arithmeticis, & earum radicibus.* - 30
Cap. IV. *De Analyſi Arithmetica.* - 44

SECTIO II.

Cap. I. *De Ratione, & Proportione Arithmetica.* 47
Cap. II. *De Ratione, & Proportione Geometrica.* 50
Uſus Regulæ aureæ ſimplicis tam directæ, quam inverſæ. 65
Cap. III. *De Proportione Harmonica, & contraharmonica.* - 69
Cap. IV. *De Proportione compoſita, duplicata &c.* 72
Applicatio Regulæ aureæ ad Problemata compoſita. 77
Cap. V. *De Algorithmo fractionum.* - 84
Cap. VI. *De Algorithmo fractionum decimalium.* 99
Cap. VII. *De Algorithmo poteſtatum cognatarum.* 110
Cap. VIII. *De Algorithmo radicum.* - 113
Cap. IX. *Applicatio Analyſis ad Probl. ſimplicia.* 123
Exempla pro Indeterminatis. - 145

SECTIO III.

Cap. I. *De Serie Arithmetica.* - 152
Cap. II. *De Serie Geometrica.* - 156
Cap. III. *De Seriebus figuratorum.* - 161
Cap. IV. *De Seriebus poteſtatum.* - 166

Cap. V. *De Seriebus Hypſiclis.* - pag. 169
Cap. IV. *De Seriebus infinitis fractionum, quarum denominatores ſunt continue proportionales Geometrici, & numeratores ſunt figurati.* - 174
Cap. VII. *De Seriebus fractionum communem numeratorem habentium, quarum denominatores ſunt numeri figurati.* - - - 180
Cap. VIII. *De Variationibus.* - - - 185
Cap. IX. *De Combinationibus.* - - 187
Cap. X. *De Binomii poteſtatibus in infinitum.* 194

PARS SECUNDA.

SECTIO I.

Cap. I. *Geneſis, & natura Æquationum.* - 204
Cap. II. *De transmutationibus Æquationum.* 217
Cap. III. *De Reſolutione generali Æquationum ſecundi gradus.* - - - - 228
Cap. IV. *De Æquationibus Cubicis.* - 235
Cap. V. *De Æquationibus Biquadraticis.* - 254
Cap. IV. *Methodus generalis reſolvendi altiores Æquationes.* - - - - - 259
Cap. VII. *De Limitibus Æquationum.* - 265
Datis Limitibus proximis quantitatis intermediæ approximare in infinitum. - - - 278

SECTIO II.

Cap. I. *Reſolutio Problem. duarum dimenſionum.* 282
Cap. II. *Applicatio Analyſis ad Problemata trium, & quatuor dimenſionum.* - - 289

Erra-

Errata graviora, quæ in his Elementis irrepſerunt, ſic corrigat Lector benevolus.

Pagina 24 linea 2 *in fine adde* : Negativæ ſigno $-$
Pag. 39. lin. a fine 4. pro *bb* lege *bb*.
Pag. 45. lin. 12 pro *inæquale* lege æquale
Pag. 53. lin. a fine 2. vox *æquales* omittatur.

Pag. 62. in fine pro $\begin{array}{l} \;m \qquad\; m \\ a:b = c:d. \\ \;n \qquad\; n \\ b:f = d:g. \end{array}$ lege $\begin{array}{l} m \qquad\quad m \\ a:b = c:d. \\ \diagup n \quad \diagup n \\ b:f = d:g. \end{array}$

Pag. 64. pro $\begin{array}{l} m \qquad m \\ a:b = c:d \\ n \qquad n \\ b:f = g:c \end{array}$ lege $\begin{array}{l} m \qquad\quad m \\ a:b = c:d. \\ \diagup n \quad \diagdown n \\ b:f = g:c. \end{array}$

Pag. 103. lin. 1. pro $5704^{\prime\prime}$ pone $5704^{\prime\prime\prime}$.

Eadem pag. lin. 2. pro $4^{\prime}$ pone $4^{\prime\prime}$.

Pag. 113. lin. 5. pro $\sqrt[3]{\overline{a}}\;^{10} = \frac{\overline{}10}{\overline{a^5}} = \overline{a}\;^{2}$

pone $\sqrt[3]{a^{-10}} = -\frac{10}{a^5} = a^{-2}$

Pag. 119. lin. 12. pro *Caput IX.* pone Problema VI.
Pag. 102. linea ultima pro $3\sqrt[3]{aa} - 2\sqrt[3]{ab}$,
lege $4\sqrt[3]{aa} - 2\sqrt[3]{ab}$.
Pag. 144. lin. 12. pro $\sqrt{63}$, lege $+ 63$.
Pag. 145. lin. 2. lege: Et fit $y = 1$; conſequenter $x = 2$.
Pag. 156. lin. 7. pro $(n - i)$ pone $(n - 1)$
Pag. 166. lin. 11. pro $\frac{-3}{4}$ lege $\frac{n-3}{4}$

Pag.

Pag. 167. lin. 13. pro $\frac{n}{3}$, lege $\frac{n^3}{3}$

Pag. 173. l. a fine 2. poſt vocem *terminus* adde: ultimus.
Pag. 177. lin. ult. pro $d - i$ lege $d - 1$.
Pag. 189. lin. 1. B2 *omittatur.*
Pag. 190. lin. 14. $\frac{n.n. - 1}{1.2}$, lege $\frac{n.n - 1}{1.2}$.

Pag. eadem lin. ult. $\frac{80.09}{1.2}$, lege $\frac{90.89}{1.2}$

Pag. 192. l. 11. in denominatore loco $n - .2$ lege $n - 2$.
Pag. eadem lin. 21. loco $- n - 2$, pone $n - 2$.
Pag. 195. lin. 18. lege $a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6$.
Pag. 228. lin. 21. pro radicis, lege radices.

Pag. 229. lin. a fine 4. pro + pone $\mp$.
Pag. 230 lin. 7, & 9. pro $(\sqrt{aa} - b)$ pone $(\sqrt{aa} + b.)$
Pag. 245. lin. a fine 8. pro fiat x^3, lege fiat x.
Ead. p. l. a fine 7. lege, Erit $x^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$.
Ead. pag. lin. a fine 6. pro $+ 3aax$ lege $+ 3abx$.
Pag. 251. lin. 17. pro: Eſt ergo $6 = \frac{7aa}{3}$

lege: Eſt ergo $b = \frac{7}{3} - aa$.

Pag. 268. lin. 4. pro AF lege AE.
Pag. ead. lin. 20. pro inſita lege in eo ſita.
Pag. 273. lin. a fine 3. pro $- 80x^8$ lege $- 80x^3$.

FINE

O. A. M. D. G.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

MAG 2006647

R. SALVAREZZA
RESTAURO
Via A. Cervi n. 5
Tel. 88.87.67 1974